NGUYỄN TÀI CHUNG
GV THPT Chuyên Hùng Vương - Gia Lai

MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP SÁNG TÁC VÀ GIẢI CÁC BÀI TOÁN VỀ PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH.

Mục lục

Lời nói đầu

Chương 1

1.1 Một số phương pháp sáng tác và giải các bài toán về phương trình, hệ phương trình

Như chúng ta đã biết phương trình, hệ phương trình có rất nhiều dạng và phương pháp giải khác nhau. Người giáo viên ngoài nắm được các dạng phương trình và cách giải chúng để hướng dẫn học sinh cần phải biết xây dựng lên các đề toán để làm tài liệu cho việc giảng dạy. Bài viết này đưa ra một số phương pháp sáng tác, quy trình xây dựng nên các phương trình, hệ phương trình. Qua các phương pháp sáng tác này ta cũng rút ra được các phương pháp giải cho các dạng phương trình, hệ phương trình tương ứng. Các quy trình xây dựng đề toán được trình bày thông qua những ví dụ, các bài toán được đặt ngay sau các ví dụ đó. Đa số các bài toán được xây dựng đều có lời giải hoặc hướng dẫn. Quan trọng hơn nữa là một số lưu ý sau lời giải sẽ giúp ta giải thích được "vì sao lại nghĩ ra lời giải này".

1.1.1 Xây dựng một số phương trình được giải bằng cách đưa về hệ phương trình.

Ví dụ 1. *Xét hệ đối xứng loại hai*

$$\begin{cases} x = 2 - 3y^2 \\ y = 2 - 3x^2 \end{cases} \Rightarrow x = 2 - 3\left(2 - 3x^2\right)^2.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 1 (THTT, số 250, tháng 04/1998). *Giải phương trình*

$$x + 3\left(2 - 3x^2\right)^2 = 2.$$

Giải. Đặt $y = 2 - 3x^2$. Ta có hệ

$$\begin{cases} x + 3y^2 = 2 \\ y = 2 - 3x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 3y^2 & (1) \\ y = 2 - 3x^2 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được

$$x-y=3(x^2-y^2)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-y=0\\3(x+y)=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=x\\y=\dfrac{1-3x}{3}.\end{array}\right.$$

• Với $y=x$, thay vào (1) ta được

$$3x^2+x-2=0\Leftrightarrow x\in\left\{-1,\frac{2}{3}\right\}.$$

• Với $y=\dfrac{1-3x}{3}$, thay vào (2) ta được

$$\frac{1-3x}{3}=2-3x^2\Leftrightarrow 9x^2-3x-5=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{21}}{6}.$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm

$$x=-1,\ x=\frac{2}{3},\ x=\frac{1-\sqrt{21}}{6},\ x=\frac{1+\sqrt{21}}{6}.$$

Lưu ý. Từ lời giải trên ta thấy rằng nếu khai triển $(2-3x^2)^2$ thì sẽ đưa phương trình đã cho về phương trình đa thức bậc bốn, sau đó biến đổi thành

$$(x+1)(3x-2)(9x^2-3x-5)=0.$$

Vậy nếu khi xây dựng bài toán, ta cố ý làm cho phương trình không có nghiệm hữu tỉ thì phương pháp khai triển đưa về phương trình bậc cao, sau đó phân tích đưa về phương trình tích sẽ gặp nhiều khó khăn.

Ví dụ 2. *Xét một phương trình bậc hai có cả hai nghiệm là số vô tỉ*

$$5x^2-2x-1=0\Leftrightarrow 2x=5x^2-1.$$

Do đó ta xét

$$\left\{\begin{array}{l}2y=5x^2-1\\2x=5y^2-1\end{array}\right.\Rightarrow 2x=5\left(\frac{5x^2-1}{2}\right)^2-1$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 2. *Giải phương trình* $8x-5\left(5x^2-1\right)^2=-8$.

Giải. Đặt $2y=5x^2-1$. Khi đó

$$\left\{\begin{array}{l}2y=5x^2-1\\8x-5.4y^2=-8\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{ll}2y=5x^2-1 & (1)\\2x=5y^2-1. & (2)\end{array}\right.$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$2(y-x)=5(x^2-y^2)\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y-x=0\\ 2=-5(x+y)\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x\\ y=-\dfrac{5x+2}{5}.\end{array}\right.$$

• Với $y=x$, thay vào (1) ta được

$$5x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{6}}{5}.$$

• Với $y=-\dfrac{5x+2}{5}$, thay vào (1) ta được

$$-\frac{10x+4}{5}=5x^2-1\Leftrightarrow 25x^2+10x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{50}}{25}.$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm $\dfrac{1\pm\sqrt{6}}{5}$, $\dfrac{-1\pm\sqrt{2}}{5}$.

Ví dụ 3. *Xét một phương trình bậc ba*

$$4x^3-3x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 8x^3-6x=-\sqrt{3}\Leftrightarrow 6x=8x^3-\sqrt{3}$$

Do đó ta xét

$$\left\{\begin{array}{l} 6y=8x^3-\sqrt{3}\\ 6x=8y^3-\sqrt{3}\end{array}\right. \Rightarrow 6x=8\left(\frac{8x^3-\sqrt{3}}{6}\right)^3-\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow 1296x+216\sqrt{3}=8\left(8x^3-\sqrt{3}\right)^3$$

$$\Rightarrow 162x+27\sqrt{3}=\left(8x^3-\sqrt{3}\right)^3.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 3. *Giải phương trình* $162x+27\sqrt{3}=\left(8x^3-\sqrt{3}\right)^3$.

Giải. Đặt $6y=8x^3-\sqrt{3}$. Ta có hệ

$$\left\{\begin{array}{l} 6y=8x^3-\sqrt{3}\\ 162x+27\sqrt{3}=216y^3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 6y=8x^3-\sqrt{3} & (1)\\ 6x=8y^3-\sqrt{3} & (2)\end{array}\right.$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$6(y-x)=8(x^3-y^3)\Leftrightarrow (x-y)\left[8\left(x^2+xy+y^2\right)+6\right]=0. \quad (3)$$

Vì $x^2+xy+y^2\geq 0$ nên $8\left(x^2+xy+y^2\right)+6>0$. Do đó từ (3) ta được $x=y$. Thay vào (1) ta được

$$6x=8x^3-\sqrt{3}\Leftrightarrow 4x^3-3x=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 4x^3-3x=\cos\frac{5\pi}{6}\qquad(4)$$

Sử dụng công thức $\cos\alpha=4\cos^3\frac{\alpha}{3}-3\cos\frac{\alpha}{3}$, ta có

$$\begin{aligned}\cos\frac{5\pi}{6}&=4\cos^3\frac{5\pi}{18}-3\cos\frac{5\pi}{18},\\ \cos\frac{17\pi}{6}&=4\cos^3\frac{17\pi}{18}-3\cos\frac{17\pi}{18},\\ \cos\frac{7\pi}{6}&=4\cos^3\frac{7\pi}{18}-3\cos\frac{7\pi}{18}.\end{aligned}$$

Vậy $x=\cos\frac{5\pi}{18}$, $x=\cos\frac{17\pi}{18}$, $x=\cos\frac{7\pi}{18}$ là tất cả các nghiệm của phương trình (4) và cũng là tất cả các nghiệm của phương trình đã cho.

Lưu ý. Phép đặt $6y=8x^3-\sqrt{3}$ được tìm ra như sau : Ta đặt $ay+b=8x^3-\sqrt{3}$ (với a, b sẽ tìm sau). Khi đó từ PT đã cho có hệ

$$\begin{cases}ay+b=8x^3-\sqrt{3}\\ 162x+27\sqrt{3}=a^3y^3+3a^2by^2+3ab^2y+b^3.\end{cases}$$

Cần chọn a và b sao cho

$$\begin{cases}\dfrac{a}{162}=\dfrac{8}{a^3}=\dfrac{b+\sqrt{3}}{27\sqrt{3}-b^3}\\ 3a^2b=3ab^2=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\ a=6.\end{cases}$$

Vậy ta có phép đặt $6y=8x^3-\sqrt{3}$.

Ví dụ 4. *Ta sẽ xây dựng một phương trình vô tỉ có ít nhất một nghiệm theo ý muốn. Xét $x=3$. Khi đó*

$$2x-5=1\Rightarrow(2x-5)^3=1\overset{do\ x=3}{=}x-2.$$

Ta mong muốn có một phương trình chứa $(ax+b)^3$ và chứa $\sqrt[3]{cx+d}$, hơn nữa phương trình này được giải bằng cách đưa về hệ "gần" đối xứng loại hai (nghĩa là khi trừ theo vế hai phương trình của hệ ta có thừa số $(x-y)$). Vậy ta xét hệ

$$\begin{cases}(2y-5)^3=x-2\\ (2x-5)^3=-x+2y-2.\end{cases}$$

Nếu có phép đặt $2y-5=\sqrt[3]{x-2}$, thì sau khi thay vào phương trình

$$(2x-5)^3=-x+2y-2$$

ta được

$$8x^3 - 60x^2 + 150x - 125 = -x + \sqrt[3]{x-2} + 5 - 2.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 4. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{x-2} = 8x^3 - 60x^2 + 151x - 128.$$

Giải.
Cách 1. Tập xác định $\mathbb{R}$. Phương trình viết lại

$$\sqrt[3]{x-2} = (2x-5)^3 + x - 3. \quad (1)$$

Đặt $2y - 5 = \sqrt[3]{x-2}$. Kết hợp với (1) ta có hệ

$$\begin{cases} (2y-5)^3 = x - 2 & (2) \\ (2x-5)^3 = -x + 2y - 2 & (3) \end{cases}$$

Lấy (3) trừ (2) theo vế ta được

$$2(x-y)\left[(2x-5)^2 + (2x-5)(2y-5) + (2y-5)^2\right] = 2(y-x)$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x - y = 0 & (4) \\ (2x-5)^2 + (2x-5)(2y-5) + (2y-5)^2 + 1 = 0. & (5) \end{array}\right.$$

- Ta có (4) $\Leftrightarrow y = x$. Thay vào (2) ta được

$$(2x-5)^3 = x - 2 \Leftrightarrow 8x^3 - 60x^2 + 149x - 123 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x-3)(8x^2 - 36x + 41) = 0 \Leftrightarrow x = 3.$$

- Do $A^2 + AB + B^2 = \left(A + \dfrac{B}{2}\right)^2 + \dfrac{3B^2}{4} \geq 0$ nên (5) không thể xảy ra.

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.
Do phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$ nên ta nghĩ đến phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số như sau
Cách 2. Tập xác định $\mathbb{R}$. Đặt $y = \sqrt[3]{x-2}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} 8x^3 - 60x^2 + 151x - 128 = y \\ x = y^3 + 2 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế hai phương trình của hệ ta được

$$8x^3 - 60x^2 + 152x - 128 = y^3 + y + 2$$
$$\Leftrightarrow 8x^3 - 60x^2 + 150x - 125 + 2x - 5 = y^3 + y$$

$$\Leftrightarrow (2x-5)^3 + (2x-5) = y^3 + y. \qquad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$. Vì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó $(*)$ viết lại

$$f(2x-5) = f(y) \Leftrightarrow 2x - 5 = y.$$

Bởi vậy

$$\begin{aligned} &(2x-5) = \sqrt[3]{x-2} \Leftrightarrow (2x-5)^3 = x - 2 \\ \Leftrightarrow &8x^3 - 60x^2 + 149x - 123 = 0 \\ \Leftrightarrow &(x-3)(8x^2 - 36x + 41) = 0 \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 3$.

Ví dụ 5. *Xét một phương trình bậc ba nào đó, chẳng hạn xét* $4x^3 + 3x = 2$*. Phương trình này tương đương*

$$8x^3 + 6x = 4 \Leftrightarrow 8x^3 = 4 - 6x \Leftrightarrow 2x = \sqrt[3]{4-6x}.$$

Ta "lồng ghép" phương trình cuối vào một hàm đơn điệu như sau

$$(2x^3) + 2x = \sqrt[3]{4-6x} + 4 - 6x \Leftrightarrow 8x^3 + 8x - 4 = \sqrt[3]{4-6x}.$$

Ta được bài toán sau

Bài toán 5. *Giải phương trình*

$$8x^3 + 8x - 4 = \sqrt[3]{4-6x}.$$

Giải. Tập xác định của phương trình là $\mathbb{R}$.
Cách 1. Phương trình đã cho tương đương

$$(2x)^3 + 2x = \sqrt[3]{4-6x} + 4 - 6x. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, \forall t \in \mathbb{R}$. Vì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà PT (1) viết lại $f\left(\sqrt[3]{4-6x}\right) = f(2x)$ nên nó tương đương

$$\sqrt[3]{4-6x} = 2x \Leftrightarrow 8x^3 + 6x = 4 \Leftrightarrow 4x^3 + 3x = 2. \qquad (2)$$

Vì hàm số $g(x) = 4x^3 + 3x$ có $g'(x) = 12x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên PT (2) có không quá một nghiệm. Xét

$$2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}\right) \Leftrightarrow (\alpha^3)^2 - 4\alpha^3 - 1 \Leftrightarrow \alpha^3 = 2 \pm \sqrt{5}.$$

Do đó, nếu đặt $\alpha = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ thì $2 = \frac{1}{2}\left(\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}\right)$. Ta có

$$\frac{1}{2}\left(\alpha^3 - \frac{1}{\alpha^3}\right) = 3\left[\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\right] + 4\left[\frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right)\right]^3.$$

Vậy $x = \frac{1}{2}\left(\alpha - \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\right)$ là nghiệm duy nhất của PT (2) và cũng là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Cách 2. Phương trình viết lại

$$(2x)^3 = \sqrt[3]{-6x+4} - 8x + 4.$$

Đặt $2y = \sqrt[3]{4-6x}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} 8y^3 = 4 - 6x \\ 8x^3 + 8x - 4 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8y^3 = -6x + 4 & (a) \\ 8x^3 = 2y + 4 - 8x. & (b) \end{cases}$$

Lấy PT (b) trừ PT (a) theo vế ta được

$$8(x^3 - y^3) = 2(y - x) \Leftrightarrow (x - y)[4(x^2 + xy + y^2) + 1] = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Thay $y = x$ vào (a) ta được

$$8x^3 = -6x + 4 \Leftrightarrow 4x^3 + 3x = 2.$$

Đến đây làm giống cách 1.

Bài toán 6 (Chọn đội tuyển tp Hồ Chí Minh dự thi quốc gia năm học 2002-2003). *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{3x-5} = 8x^3 - 36x^2 + 53x - 25.$$

Giải. Tập xác định $\mathbb{R}$. Phương trình viết lại

$$\sqrt[3]{3x-5} = (2x-3)^3 - x + 2. \qquad (1)$$

Đặt $2y - 3 = \sqrt[3]{3x-5}$. Kết hợp với (1) ta có hệ

$$\begin{cases} (2y-3)^3 = 3x - 5 & (2) \\ (2x-3)^3 = x + 2y - 5 & (3) \end{cases}$$

Lấy (3) trừ (2) theo vế ta được

$$2(x-y)\left[(2x-3)^2 + (2x-3)(2y-3) + (2y-3)^2\right] = 2(y-x)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x - y = 0 & (4) \\ (2x-3)^2 + (2x-3)(2y-3) + (2y-3)^2 + 1 = 0. & (5) \end{array} \right.$$

• Ta có (4) $\Leftrightarrow y = x$. Thay vào (2) ta được

$$(2x-3)^3 = 3x - 5 \Leftrightarrow 8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = 3x - 5$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(8x^2 - 20x + 11) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4}. \end{array} \right.$$

• Do $A^2 + AB + B^2 = \left(A + \dfrac{B}{2}\right)^2 + \dfrac{3B^2}{4} \geq 0$ nên (5) không thể xảy ra.

Phương trình có ba nghiệm $x = 2,\ x = \dfrac{5 \pm \sqrt{3}}{4}$.

Bài toán 7 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2006). *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1.$$

Giải. Tập xác định của phương trình là $\mathbb{R}$. Đặt $\sqrt[3]{6x+1} = 2y$. Ta có hệ

$$\left\{ \begin{array}{l} 8x^3 - 4x - 1 = 2y \\ 6x + 1 = 8y^3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} 8x^3 = 4x + 2y + 1 & (1) \\ 8y^3 = 6x + 1. & (2) \end{array} \right.$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$8(x^3 - y^3) = 2(y - x) \Leftrightarrow (x - y)[4(x^2 + xy + y^2) + 1] = 0 \Leftrightarrow y = x.$$

Thay $y = x$ vào (2) ta được

$$8x^3 - 6x = 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \cos\frac{\pi}{3}. \qquad (3)$$

Sử dụng công thức $\cos\alpha = 4\cos^3\dfrac{\alpha}{3} - 3\cos\dfrac{\alpha}{3}$, ta có

$$\cos\frac{\pi}{3} = 4\cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9},$$
$$\cos\frac{7\pi}{3} = 4\cos^3\frac{7\pi}{9} - 3\cos\frac{7\pi}{9},$$
$$\cos\frac{5\pi}{3} = 4\cos^3\frac{5\pi}{9} - 3\cos\frac{5\pi}{9}.$$

Vậy $x = \cos\dfrac{\pi}{9}$, $x = \cos\dfrac{5\pi}{9}$, $x = \cos\dfrac{7\pi}{9}$ là tất cả các nghiệm của phương trình (3) và cũng là tất cả các nghiệm của phương trình đã cho.

Lưu ý. Ta còn có thể giải cách khác như sau : Phương trình viết lại

$$6x + 1 + \sqrt[3]{6x+1} = (2x)^3 + 2x. \qquad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t, \forall t \in \mathbb{R}$. Vì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà PT (2) viết lại $f\left(\sqrt[3]{6x+1}\right) = f(2x)$ nên nó tương đương

$$\sqrt[3]{6x+1} = 2x \Leftrightarrow 8x^3 - 6x = 1 \Leftrightarrow 4x^3 - 3x = \frac{1}{2}.$$

1.1.2 Sử dụng công thức lượng giác để sáng tác các phương trình đa thức bậc cao.

Ví dụ 6. *Từ công thức*

$$\cos 6\alpha = 32\cos^6\alpha - 48\cos^4\alpha + 18\cos^2\alpha - 1,$$

lấy $\cos\alpha = x$ *ta được*

$$\cos 6\alpha = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.$$

Chọn $\alpha = \frac{\pi}{3}$ *ta được*

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = \frac{1}{2}.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 8 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2009). *Giải phương trình*

$$64x^6 - 96x^4 + 36x^2 - 3 = 0.$$

Giải. Ta có

$$\begin{aligned}\cos 6\alpha &= 2\cos^2 3\alpha - 1 = 2\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)^2 - 1\\ &= 32\cos^6\alpha - 48\cos^4\alpha + 18\cos^2\alpha - 1. \qquad (1)\end{aligned}$$

Phương trình đã cho tương đương

$$32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1 = \cos\frac{\pi}{3}. \qquad (2)$$

Từ công thức (1) suy ra (2) có 6 nghiệm là

$$x = \cos\left(\frac{\pi}{3.6} + \frac{k2\pi}{6}\right),\ k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Ví dụ 7. *Từ công thức*

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha,$$

Đặt $\cos\alpha = \dfrac{x}{2\sqrt{3}}$ *ta được*

$$\begin{aligned}\cos 5\alpha &= \frac{16x^5}{288\sqrt{3}} - \frac{20x^3}{24\sqrt{3}} + \frac{5x}{2\sqrt{3}} = \frac{x^5}{18\sqrt{3}} - \frac{5x^3}{6\sqrt{3}} + \frac{5x}{2\sqrt{3}}\\ &= \frac{x^5 - 15x^3 + 45x}{18\sqrt{3}}.\end{aligned}$$

Chọn $5\alpha = \dfrac{\pi}{6}$ *ta được*

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x^5 - 15x^3 + 45x}{18\sqrt{3}} \Leftrightarrow x^5 - 15x^3 + 45x - 27 = 0.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 9. *Giải phương trình* $x^5 - 15x^3 + 45x - 27 = 0.$

Giải. Tập xác định $\mathbb{R}$. Đặt $x = 2\sqrt{3}t$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned}&288\sqrt{3}t^5 - 360\sqrt{3}t^3 + 90\sqrt{3}t - 27 = 0\\ &\Leftrightarrow 2\left(16t^5 - 20t^3 + 5t\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow 16t^5 - 20t^3 + 5t = \cos\frac{\pi}{6}.\end{aligned} \tag{1}$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned}&\cos 5\alpha + \cos\alpha = 2\cos 3\alpha\cos 2\alpha\\ &\Leftrightarrow \cos 5\alpha = 2\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)\left(2\cos^2\alpha - 1\right) - \cos\alpha\\ &\Leftrightarrow \cos 5\alpha = 2\left(8\cos^5\alpha - 10\cos^3\alpha + 3\cos\alpha\right) - \cos\alpha\\ &\Leftrightarrow \cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha.\end{aligned} \tag{2}$$

Từ công thức (2) suy ra (1) có 5 nghiệm là

$$t = \cos\left(\frac{\pi}{6.5} + \frac{k2\pi}{5}\right),\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Phương trình đã cho có 5 nghiệm là

$$x = 2\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{30} + \frac{k2\pi}{5}\right),\ k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Lưu ý. Trong lời giải trên, phép đặt $x = 2\sqrt{3}t$ được tìm ra như sau : Do công thức

$$\cos 5\alpha = 16\cos^5\alpha - 20\cos^3\alpha + 5\cos\alpha,$$

nên ta đặt $x = at$, với a sẽ tìm sau. Thay $x = at$ vào phương trình đã cho ta được

$$a^5t^5 - 15a^3t^3 + 45at - 27 = 0.$$

Ta tìm a thoả mãn điều kiện

$$\frac{a^5}{16} = \frac{-15a^3}{-20} = \frac{45a}{5} \Rightarrow \frac{a^4}{16} = \frac{3a^2}{4} = 9 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3}.$$

Vậy ta có phép đặt $x = 2\sqrt{3}t$.

Ví dụ 8. *Từ công thức*

$$\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha,$$

lấy $\sin\alpha = 2x$ *ta được*

$$\sin 5\alpha = 512x^5 - 160x^3 + 10x.$$

Chọn $5\alpha = \frac{\pi}{3}$, *ta có*

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = 512x^5 - 160x^3 + 10x \Leftrightarrow 1024x^5 - 320x^3 + 20x - \sqrt{3} = 0.$$

Ta được bài toán sau

Bài toán 10. *Giải phương trình*

$$1024x^5 - 320x^3 + 20x - \sqrt{3} = 0.$$

Giải. Đặt $x = \frac{t}{2}$, thay vào phương trình đã cho ta được

$$32t^5 - 40t + 10 = \sqrt{3} \Leftrightarrow 16t^5 - 20t^3 + 5t = \sin\frac{\pi}{3}. \tag{1}$$

Ta có

$$\begin{aligned} &\sin 5\alpha + \sin\alpha = 2\sin 3\alpha\cos 2\alpha \\ \Leftrightarrow &\sin 5\alpha = 2\left(3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha\right)\left(1 - 2\sin^2\alpha\right) - \sin\alpha \\ \Leftrightarrow &\sin 5\alpha = 2\left(8\sin^5\alpha - 10\sin^3\alpha + 3\sin\alpha\right) - \sin\alpha \\ \Leftrightarrow &\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha. \end{aligned} \tag{2}$$

Từ công thức (2) suy ra (1) có 5 nghiệm là

$$t = \sin\left(\frac{\pi}{3.5} + \frac{k2\pi}{5}\right), \; k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Phương trình đã cho có 5 nghiệm là

$$x = \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{15} + \frac{k2\pi}{5}\right), \; k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

1.1.3 Sử dụng các đồng nhất thức đại số có xuất sứ từ các hàm lượng giác hypebôlic để sáng tác các phương trình đa thức bậc cao.

Sử dụng các đồng nhất thức đại số có xuất sứ từ các hàm lượng giác hypebôlic ta có thể sáng tác được một số phương trình đa thức bậc cao có cách giải đặc thù.

Ví dụ 9. *Xét đồng nhất thức*

$$\frac{1}{2}\left(a^5-\frac{1}{a^5}\right)=2\left(4m^3+3m\right)\left(1+2m^2\right)-m=16m^5+20m^3+5m,$$

trong đó $m=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$. *Đặt* $m=\frac{x}{2\sqrt{2}}$, *khi đó*

$$\frac{1}{2}\left(a^5-\frac{1}{a^5}\right)=\frac{16x^5}{128\sqrt{2}}+\frac{20x^3}{16\sqrt{2}}+\frac{5x}{2\sqrt{2}}=\frac{x^5}{8\sqrt{2}}+\frac{10x^3}{8\sqrt{2}}+\frac{20x}{8\sqrt{2}}.$$

Lấy $\frac{1}{2}\left(a^5-\frac{1}{a^5}\right)=\frac{9}{4\sqrt{2}}$, *ta được bài toán sau*

Bài toán 11. *Giải phương trình*

$$x^5+10x^3+20x-18=0.$$

Giải. Ta thấy rằng

$$x=\sqrt{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\Leftrightarrow\sqrt{2}a^2-xa-\sqrt{2}=0\Leftrightarrow a=\frac{x\pm\sqrt{x^2+8}}{2\sqrt{2}}.$$

Do đó ta có quyền đặt $x=\sqrt{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)$. Khi đó

$$x^5=4\sqrt{2}\left(a^5-5a^3+10a-\frac{10}{a}+\frac{5}{a^3}-\frac{1}{a^5}\right)$$
$$10x^3=20\sqrt{2}\left(a^3-3a+\frac{3}{a}-\frac{1}{a^3}\right)$$
$$20x=20\sqrt{2}\left(a-\frac{1}{a}\right).$$

Thay vào phương trình đã cho ta được

$$4\sqrt{2}\left(a^5-\frac{1}{a^5}\right)-18=0\Leftrightarrow4\sqrt{2}(a^5)^2-18a^5-4\sqrt{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^5 = \dfrac{9+\sqrt{113}}{4\sqrt{2}} \\ a^5 = \dfrac{9-\sqrt{113}}{4\sqrt{2}} = -\dfrac{4\sqrt{2}}{9+\sqrt{113}}. \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất

$$x = \sqrt{2}\left(\sqrt[5]{\frac{9+\sqrt{113}}{4\sqrt{2}}} - \sqrt[5]{\frac{4\sqrt{2}}{9+\sqrt{113}}}\right).$$

Lưu ý. Trong lời giải trên, phép đặt $x = \sqrt{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right)$ được tìm ra như sau : Do công thức

$$\frac{1}{2}\left(a^5 - \frac{1}{a^5}\right) = 2\left(4m^3 + 3m\right)\left(1 + 2m^2\right) - m = 16m^5 + 20m^3 + 5m,$$

trong đó $m = \dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right)$. nên ta đặt $x = pm$, với p sẽ tìm sau. Thay $x = pm$ vào phương trình đã cho ta được

$$p^5m^5 + 10p^3m^3 + 20pm - 18 = 0.$$

Ta tìm p thoả mãn điều kiện

$$\begin{cases} \dfrac{10}{p^2} = \dfrac{20}{16} \\ \dfrac{20}{p^4} = \dfrac{5}{16} \end{cases} \Rightarrow p^2 = 8 \Rightarrow p = 2\sqrt{2}.$$

Vậy ta có phép đặt $x = \sqrt{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right)$.

Ví dụ 10. *Từ đồng nhất thức*

$$\frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right) = -m + 2(4m^3 - 3m)(2m^2 - 1) = 16m^5 - 20m^3 + 5m,$$

trong đó $m = \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)$. *Lấy* $m = x$ *ta được*

$$\frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right) = 16x^5 - 20x^3 + 5x.$$

Lấy $\dfrac{1}{2}\left(a^5 + \dfrac{1}{a^5}\right) = -7$ *ta được phương trình*

$$16x^5 - 20x^3 + 5x + 7 = 0.$$

Từ phương trình này ta được phương trình

$$(x-1)(16x^5 - 20x^3 + 5x + 7) = 0.$$

Vậy ta có bài toán sau

Bài toán 12 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2008). *Giải phương trình*

$$16x^6 - 16x^5 - 20x^4 + 20x^3 + 5x^2 + 2x - 7 = 0. \quad (1)$$

Giải. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 16x^5 - 20x^3 + 5x + 7 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ 16x^5 - 20x^3 + 5x = -7 \ (2) \end{array}\right.$$

Tiếp theo ta giải phương trình (2).

• Nếu $|x| \leq 1$ thì đặt $x = \cos t$, với $t \in [0; \pi]$. Thay vào (2) ta được

$$6\cos^5 t - 20\cos^3 t + 5\cos t = -7 \Leftrightarrow \cos 5t = -7 \text{ (vô nghiệm)}.$$

• Nếu $|x| > 1$ thì xét phương trình

$$x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right) \Leftrightarrow a^2 - 2xa + 1 = 0. \quad (3)$$

Vì $|x| > 1$ nên $\Delta' = x^2 - 1 > 0$, suy ra (3) luôn có hai nghiệm phân biệt a_1 và a_2 (giả sử $a_1 < a_2$). Đặt $f(a) = a^2 - 2xa + 1$.

Nếu $x > 1$ thì $f(1) = 2 - 2x = 2(1-x) < 0$ và $f(0) = 1 > 0$. Mà $a_1a_2 = 1$ nên suy ra $0 < a_1 < 1 < a_2$.

Nếu $x < -1$ thì $f(-1) = 2 + 2x = 2(1+x) < 0$ và $f(0) = 1 > 0$. Mà $a_1a_2 = 1$ nên suy ra $a_1 < -1 < a_2 < 0$.

Vậy (3) có nghiệm a duy nhất thoả $|a| > 1$. Tóm lại khi $|x| > 1$ thì có duy nhất số thực a thoả mãn $|a| > 1$ và $x = \frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)$. Ta có

$$16x^5 = 16\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^5 = \frac{1}{2}\left(a^5 + 5a^3 + 10a + \frac{10}{a} + \frac{5}{a^3} + \frac{1}{a^5}\right) \quad (3)$$

$$20x^3 = 20\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)\right]^3 = \frac{5}{2}\left(a^3 + 3a + \frac{3}{a} + \frac{1}{a^3}\right) \quad (4)$$

$$5x = \frac{5}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right). \quad (5)$$

Suy ra

$$16x^5 - 20x^3 + 5x = \frac{1}{2}\left(a^5 + \frac{1}{a^5}\right). \quad (6)$$

Từ (6) và (2) ta có

$$\frac{1}{2}\left(a^5+\frac{1}{a^5}\right)=-7 \Leftrightarrow \left(a^5\right)^2+14a^5+1=0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a^5=-7-\sqrt{48} \\ a^5=-7+\sqrt{48} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\sqrt[5]{-7-\sqrt{48}} \\ a=\sqrt[5]{-7+\sqrt{48}}. \end{array}\right.$$

Vậy (2) có nghiệm duy nhất $x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{-7-\sqrt{48}}+\sqrt[5]{-7+\sqrt{48}}\right)$. Do đó phương trình đã cho có hai nghiệm

$$x=1, x=\frac{1}{2}\left(\sqrt[5]{-7-\sqrt{48}}+\sqrt[5]{-7+\sqrt{48}}\right).$$

1.1.4 Sáng tác một số phương trình đẳng cấp đối với hai biểu thức

Ta biết rằng nếu một phương trình đẳng cấp bậc k đối với hai biểu thức $P(x)$ và $Q(x)$ thì được giải bằng cách chia cả hai vế cho $[P(x)]^k$ (hoặc $[Q(x)]^k$), sau đó đặt $t=\frac{P(x)}{Q(x)}$ (hoặc $t=\frac{Q(x)}{P(x)}$), đưa về phương trình đa thức bậc k theo t. Vận dụng điều này ta có một phương pháp đơn giản để tạo ra nhiều phương trình thú vị.

Ví dụ 11. *Xét một phương trình bậc hai*

$$7t^2+13t-2=0.$$

Lấy $t=\frac{x-1}{x^2+x+1}$ *ta được*

$$7.\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^2+13.\frac{x-1}{x^2+x+1}-2=0.$$

Quy đồng bỏ mẫu ta được bài toán sau

Bài toán 13 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2009). *Giải phương trình*

$$2(x^2+x+1)^2-7(x-1)^2=13(x^3-1).$$

Giải. Tập xác định $\mathbb{R}$. Do $x^2+x+1>0$ nên chia cả hai vế phương trình cho $(x^2+x+1)^2>0$ ta được

$$2-7.\left(\frac{x-1}{x^2+x+1}\right)^2=13.\frac{x-1}{x^2+x+1}.$$

Đặt $t = \dfrac{x-1}{x^2+x+1}$. Khi đó

$$2 - 7t^2 = 13t \Leftrightarrow 7t^2 + 13t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \\ t = \dfrac{1}{7}. \end{array}\right.$$

• Khi $t = -2$ ta được

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = -2 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

• Khi $t = \dfrac{1}{7}$ ta được

$$\frac{x-1}{x^2+x+1} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm $x = -1$, $x = -\dfrac{1}{2}$, $x = 2$, $x = 4$.

Lưu ý. Phương trình này có nhiều hơn một nghiệm, và các nghiệm của phương trình này đều là số nguyên và số hữu tỉ, do đó ta có thể giải nhanh chóng bằng cách khai triển đưa về phương trình bậc bốn, sau đó nhẩm nghiệm, đưa về phương trình tích.

Ví dụ 12. *Xét một phương trình bậc hai có nghiệm*

$$2t^2 - 7t + 3 = 0.$$

Lấy $t = \sqrt{\dfrac{x^2+x+1}{x-1}}$ *ta được*

$$2\frac{x^2+x+1}{x-1} - 7\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x-1}} + 3 = 0.$$

Quy đồng bỏ mẫu ta được

$$2(x^2+x+1) + 3(x-1) = 7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 14 (Đề nghị OLYPIC 30/04/2007). *Giải phương trình*

$$2x^2 + 5x - 1 = 7\sqrt{x^3-1}. \tag{1}$$

Đáp số. $x = 4 \pm \sqrt{6}$.

Giải. Điều kiện $x \geq 1$.

$$(1) \Leftrightarrow 3(x-1) + 2(x^2+x+1) = 7\sqrt{(x-1)(x^2+x+1)}. \tag{2}$$

Vì $x = 1$ không phải là nghiệm nên chia cả hai vế của (2) cho $x - 1 > 0$ ta được

$$3 + 2\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = 7\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}}. \tag{3}$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x^2 + x + 1}{x - 1}} \Rightarrow x^2 + (1 - t^2)x + 1 + t^2 = 0$. Điều kiện của t là

$$\begin{cases} t \geq 0 \\ \Delta_x = t^4 - 6t^2 - 3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow t \geq \sqrt{3 + 2\sqrt{3}}.$$

Phương trình (3) trở thành $2t^2 - 7t + 3 = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{3, \dfrac{1}{2}\right\}$. Kết hợp với điều kiện của t ta được $t = 3$. Vậy

$$\sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x - 1}} = 3 \Leftrightarrow 9x - 9 = x^2 + x + 1 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 10 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \pm \sqrt{6}.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 4 \pm \sqrt{6}$ là tất cả các nghiệm của phương trình (1).

Lưu ý. Gọi $Q(x) = x - 1, P(x) = x^2 + x + 1$. Mấu chốt của lời giải là phân tích vế trái của PT (1) thành

$$VT = 2P(x) + 3Q(x).$$

Tinh ý ta sẽ thấy 2 là hệ số của x^2 trong vế trái của (1). Cũng từ đó suy ra 3. Tuy nhiên dễ dàng tìm được các số 2 và 3 bằng phương pháp hệ số bất định

$$2x^2 + 5x - 1 = p(x^2 + x + 1) + q(x - 1)$$
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 1 = px^2 + (p + q)x + p - q.$$

Đồng nhất hệ số ta được

$$\begin{cases} p = 2 \\ p + q = 5 \\ p - q = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2 \\ q = 3. \end{cases}$$

Ví dụ 13. *Xét $x = 2$. Khi đó*

$$(x^2 + 2x + 2) = 10,\ x + 1 = 3,$$
$$3(x^2 + 2x + 2) - 8(x + 1) = 6,$$
$$(x + 1)(x^2 + 2x + 2) = 30,$$
$$(x + 1)(x^2 + 2x + 2) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2.$$

Vậy với $x = 2$ thì

$$3(x^2 + 2x + 2) - 8(x + 1) = \sqrt{30}.\frac{6}{\sqrt{30}} = \frac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 15. *Giải phương trình*

$$3x^2 - 2x - 2 = \frac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{x^3 + 3x^2 + 4x + 2}$$

Giải. Điều kiện

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x^2 + 2x + 2) \Leftrightarrow x \geq -1.$$

Phương trình đã cho viết lại

$$3(x^2 + 2x + 2) - 8(x+1) = \frac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{(x+1)(x^2 + 2x + 2)}. \quad (1)$$

Dễ thấy $x = -1$ không là nghiệm của (1).
Tiếp theo xét $x \neq -1$. Chia cả hai vế của (1) cho $x + 1 > 0$ ta được

$$3.\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} - 8 = \frac{6}{\sqrt{30}}\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}}. \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x + 2}{x+1}} > 0$. Khi đó

$$3t^2 - 8 = \frac{6}{\sqrt{30}}t \Leftrightarrow 3t^2 - \frac{6}{\sqrt{30}}t - 8 = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{30}t^2 - 6t - 8\sqrt{30} = 0. \quad (3)$$

Nhận xét rằng t là nghiệm dương của phương trình (3), hay $\sqrt{\dfrac{10}{3}}$. Vậy

$$\sqrt{\frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}} = \sqrt{\frac{10}{3}} \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 6 = 10x + 10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -\dfrac{2}{3}. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta thấy $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Bài toán 16. *Giải phương trình*

$$x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}. \quad (1)$$

Giải. Tập xác định $\mathbb{R}$. Vì

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)$$

nên

$$(1) \Leftrightarrow 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1)}$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}-1=-\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}.$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}>0$. Khi đó

$$2t^2-1+\frac{\sqrt{3}}{3}t=0\Leftrightarrow 2\sqrt{3}t^2+t-\sqrt{3}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\\ t=-\dfrac{3}{2\sqrt{3}}\ \text{(loại)}\end{array}\right.$$

Vậy

$$\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}}=\frac{1}{\sqrt{3}}\Leftrightarrow 2x^2-4x+2=0\Leftrightarrow x=1.$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=1$.

Bài toán 17. *Giải phương trình* $2(x^2-3x+2)=3\sqrt{x^3+8}$.

Giải. Điều kiện : $x>-3$. Phương trình tương đương

$$2(x^2-2x+4)-2(x+2)=3\sqrt{(x+2)(x^2-2x+4)}$$
$$\Leftrightarrow 2-2.\frac{x+2}{x^2-2x+4}=3\sqrt{\frac{x+2}{x^2-2x+4}}.$$

Đặt $t=\sqrt{\dfrac{x+2}{x^2-2x+4}}\geq 0$. Khi đó

$$2-2t^2=3t\Leftrightarrow 2t^2+3t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2}\\ t=-2\,\text{(loại)}.\end{array}\right.$$

Vậy

$$\sqrt{\frac{x+2}{x^2-2x+4}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x^2-6x-4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} x=3-\sqrt{13}\\ x=3+\sqrt{13}.\end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm $x=3-\sqrt{13}$ và $x=3+\sqrt{13}$.

Bài toán 18 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2009). *Giải phương trình*

$$\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}-\sqrt{3x^2-6x+19}=0.$$

Giải. Điều kiện $\begin{cases} x^2+x-6\geq 0\\ x-1\geq 0\\ 3x^2-6x+19\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow x\geq 2$. Phương trình tương đương

$$\sqrt{x^2+x-6}+3\sqrt{x-1}=\sqrt{3x^2-6x+19}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 6 + 6\sqrt{(x^2 + x - 6)(x - 1)} + 9x - 9 = 3x^2 - 6x + 19$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{(x - 2)(x + 3)(x - 1)} = x^2 - 8x + 17$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{(x^2 + 2x - 3)(x - 2)} = (x^2 + 2x - 3) - 10(x - 2) \quad (1)$$
$$\Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}} = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2} - 10. \quad (2)$$

(Do $x = 2$ không là nghiệm của (2)). Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}} \geq 0$. Thay vào (2) ta được

$$3t = t^2 - 10 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \text{ (loại)} \\ t = 5. \end{array}\right.$$

Vậy

$$\sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{x - 2}} = 5 \Leftrightarrow x^2 - 23x + 47 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{23 \pm \sqrt{341}}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện ta thấy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \dfrac{23 \pm \sqrt{341}}{2}$.

Bài toán 19. *Giải phương trình*

$$x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = \left(x^3 + x\right)\sqrt{\frac{1 - x^2}{x}}. \quad (1)$$

Giải. Do $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = x^2(x + 1)^2 + (1 - x)^2 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên nếu x là nghiệm của (1) thì

$$\left\{\begin{array}{l} x > 0 \\ \dfrac{1 - x^2}{x} > 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

Với điều kiện đó thì

$$(1) \Leftrightarrow x^2(x + 1)^2 + (1 - x)^2 = (x^2 + 1)\sqrt{(1 - x)[x(1 + x)]}. \quad (2)$$

Đặt $u = x(1 + x)$, $v = 1 - x$ (điều kiện $u > 0$, $v > 0$). Khi đó $u + v = x^2 + 1$. Vậy (2) trở thành

$$u^2 + v^2 = (u + v)\sqrt{uv} \Leftrightarrow \left(\frac{u}{v}\right)^2 + 1 = \left(\frac{u\sqrt{u}}{v\sqrt{v}} + \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}\right). \quad (3)$$

Đặt $t = \dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}}$, thay vào (3) ta được

$$t^4 + 1 = t^3 + t \Leftrightarrow (t - 1)(t^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Vậy $\dfrac{\sqrt{u}}{\sqrt{v}} = 1 \Leftrightarrow u = v$. Do đó

$$x(1+x) = 1 - x \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 + \sqrt{2} \\ x = -1 - \sqrt{2} \text{ (loại)} \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1 + \sqrt{2}$.

Bài toán 20. *Giải phương trình*

$$\sqrt{5x^2 + 14x + 9} - \sqrt{x^2 - x - 20} = 5\sqrt{x+1}. \quad (1)$$

Giải. Điều kiện

$$\left\{\begin{array}{l} 5x^2 + 14x + 9 \geq 0 \\ x^2 - x - 20 \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} (x+1)(5x+9) \geq 0 \\ (x+4)(x-5) \geq 0 \\ x + 1 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x \geq 5.$$

Ta có

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow \sqrt{5x^2 + 14x + 9} = \sqrt{x^2 - x - 20} + 5\sqrt{x+1} \\ &\Leftrightarrow 2x^2 - 5x + 2 = 5\sqrt{(x+4)(x-5)(x+1)} \\ &\Leftrightarrow 2(x^2 - 4x - 5) + 3(x+4) = 5\sqrt{(x^2 - 4x - 5)(x+4)}. \quad (2) \end{aligned}$$

Với điều kiện $x \geq 5$, chia cả hai vế của (2) cho $x + 4 > 0$ ta được

$$2.\frac{x^2 - 4x - 5}{x+4} + 3 = 5\sqrt{\frac{x^2 - 4x - 5}{x+4}} \quad (3)$$

Đặt $t = \sqrt{\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x+4}} \geq 0$, thay vào (3) ta được

$$2t^2 - 5t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \dfrac{3}{2}. \end{array}\right.$$

Khi $t = 1$, ta có

$$\sqrt{\frac{x^2 - 4x - 5}{x+4}} = 1 \Leftrightarrow x^2 - 5x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{6}}{2}.$$

Khi $t = \dfrac{3}{2}$, ta có $\sqrt{\dfrac{x^2 - 4x - 5}{x+4}} = \dfrac{3}{2}$, nghĩa là

$$4(x^2 - 5x - 5) = 9x + 36 \Leftrightarrow 4x^2 - 35x - 56 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = -\dfrac{7}{4}. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta được các nghiệm của phương trình đã cho là

$$x = 8,\ x = \frac{5+\sqrt{61}}{2}.$$

1.1.5 Xây dựng phương trình từ các đẳng thức.

Xuất phát từ một đẳng thức nào đó, chúng ta có thể xây dựng lên các phương trình vô tỉ. Chẳng hạn từ hằng đẳng thức

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a)$$

ta có

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

Bằng cách chọn a, b, c sao cho $(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3$ ta xẽ tạo ra được phương trình vô tỉ chứa căn bậc ba.

Ví dụ 14. *Cho*

$$a=\sqrt[3]{7x+1},\ b=-\sqrt[3]{x^2-x-8},\ c=\sqrt[3]{x^2-8x-1}$$

thì $a^3+b^3+c^3=8$. Ta được bài toán sau

Bài toán 21 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/1999). *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{7x+1}-\sqrt[3]{x^2-x-8}+\sqrt[3]{x^2-8x-1}=2.$$

Giải. Tập xác định $\mathbb{R}$. Đặt

$$a=\sqrt[3]{7x+1},\ b=-\sqrt[3]{x^2-x-8},\ c=\sqrt[3]{x^2-8x-1}.$$

Khi đó

$$\begin{cases} a^3+b^3+c^3=8 & (1)\\ a+b+c=2 & (2)\end{cases}$$

Mặt khác ta có hằng đẳng thức

$$(a+b+c)^3 = a^3+b^3+c^3+3(a+b)(b+c)(c+a). \quad (3)$$

Thay (1), (2) vào (3) ta được

$$(a+b)(b+c)(c+a)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-b\\ b=-c\\ c=-a.\end{array}\right.$$

Vậy

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{7x+1}=\sqrt[3]{x^2-x-8}\\ \sqrt[3]{x^2-x-8}=\sqrt[3]{x^2-8x-1}\\ \sqrt[3]{x^2-8x-1}=-\sqrt[3]{7x+1}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}7x+1=x^2-x-8\\ x^2-x-8=x^2-8x-1\\ x^2-8x-1=-7x-1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-8x-9=0\\ 7x=7\\ x^2-x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=9\\ x=1\\ x=0.\end{array}\right.$$

Thay các giá trị $-1, 0, 1, 9$ vào phương trình đã cho thấy thoả mãn. Vậy phương trình có 4 nghiệm -1, 0, 1, 9.

Ví dụ 15. *Cho*

$$a=\sqrt[3]{3x^2-x+2001},\ b=-\sqrt[3]{3x^2-7x+2002},\ c=-\sqrt[3]{6x-2003}$$

thì $a^3+b^3+c^3=2002$. *Ta được bài toán sau*

Bài toán 22. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{3x^2-x+2001}-\sqrt[3]{3x^2-7x+2002}-\sqrt[3]{6x-2003}=\sqrt[3]{2002}.$$

Hướng dẫn. Đặt

$$a=\sqrt[3]{3x^2-x+2001},\ b=-\sqrt[3]{3x^2-7x+2002},\ c=-\sqrt[3]{6x-2003}.$$

Khi đó

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a)=0.$$

Việc giải phương trình đã cho được quy về giải

$$\left[\begin{array}{l}\sqrt[3]{3x^2-x+2001}=\sqrt[3]{3x^2-7x+2002}\\ \sqrt[3]{3x^2-7x+2002}=-\sqrt[3]{6x-2003}\\ \sqrt[3]{6x-2003}=\sqrt[3]{3x^2-x+2001}.\end{array}\right.$$

Ví dụ 16. *Cho*

$$a=\sqrt[3]{1945x+1975},\ b=\sqrt[3]{60x+15},\ c=\sqrt[3]{15-x}$$

thì $a^3+b^3+c^3=2004x+2005$. *Ta được bài toán sau*

Bài toán 23 (HSG Tỉnh Gia Lai năm học 2004-2005). *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{1945x+1975}+\sqrt[3]{60x+15}+\sqrt[3]{15-x}-\sqrt[3]{2004x+2005}=0.$$

Giải. Tập xác định $\mathbb{R}$. Đặt

$$a = \sqrt[3]{1945x + 1975},\ b = \sqrt[3]{60x + 15},\ c = \sqrt[3]{15 - x}.$$

Khi đó $a^3 + b^3 + c^3 = 2004x + 2005$. Thay vào PT đã cho ta được

$$a + b + c - \sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3} = 0 \Leftrightarrow a + b + c = \sqrt[3]{a^3 + b^3 + c^3}$$
$$\Leftrightarrow (a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 \quad (1)$$

Mặt khác ta có hằng đẳng thức

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a). \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$(a + b)(b + c)(c + a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -b \\ b = -c \\ c = -a. \end{array}\right.$$

Vậy

$$\left[\begin{array}{l} 1945x + 1975 = -60x - 15 \\ 60x + 15 = x - 15 \\ 15 - x = -(1945x + 1975) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{1990}{2005} \\ x = -\dfrac{30}{59} \\ x = -\dfrac{1990}{1944}. \end{array}\right.$$

Vậy PT có ba nghiệm $x = -\dfrac{1990}{2005}$, $x = -\dfrac{30}{59}$, $x = -\dfrac{1990}{1944}$.

Ví dụ 17. *Cho* $a = \sqrt[3]{3x + 1}$, $b = \sqrt[3]{5 - x}$, $c = \sqrt[3]{2x - 9}$ *thì* $a^3 + b^3 + c^3 = 4x - 3$. *Ta được bài toán sau*

Bài toán 24. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{3x + 1} + \sqrt[3]{5 - x} + \sqrt[3]{2x - 9} - \sqrt[3]{4x - 3} = 0.$$

Ví dụ 18. *Từ hằng đẳng thức*

$$a^3 + b^3 - ab(a + b) = (a + b)(a - b)^2,$$

lấy $a = \sqrt[3]{x + 1}$, $b = -\sqrt[3]{x + 2}$. *Khi đó*

$$\begin{aligned} & a^3 + b^3 - ab(a + b) \\ =& x + 1 - x - 2 + \sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}\left(\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x + 2}\right) \\ =& -1 + \sqrt[3]{x^2 + 3x + 2}\left(\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt[3]{x + 2}\right). \end{aligned}$$

Bằng cách cho $a^3 + b^3 - ab(a + b) = 0$ *ta được bài toán sau*

Bài toán 25. *Giải phương trình*

$$\sqrt[3]{x^2+3x+2}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+2}\right)=1.$$

Giải. Tập xác định $\mathbb{R}$. Phương trình viết lại

$$(x+1)+(x-2)+\sqrt[3]{x^2+3x+2}\left(\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x+2}\right)=0. \qquad (*)$$

Đặt $a=\sqrt[3]{x+1}$, $b=-\sqrt[3]{x+2}$. Thay vào (*) ta được

$$a^3+b^3-ab(a+b)=0 \Leftrightarrow (a+b)(a-b)^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b. \end{array}\right.$$

Vậy

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[3]{x+1}=-\sqrt[3]{x+2} \\ \sqrt[3]{x+1}=\sqrt[3]{x+2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+1=-x-2 \\ 0x=1\ (v) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}.$$

Thay $x=-\frac{3}{2}$ vào PT đã cho thấy thoả mãn. Vậy $x=-\frac{3}{2}$ là nghiệm duy nhất của PT.

1.1.6 Xây dựng phương trình từ các hệ đối xứng loại II.

Xét hệ phương trình

$$\left\{\begin{array}{ll} (\alpha x+\beta)^2=ay+b & (1) \\ (\alpha y+\beta)^2=ax+b & (2) \end{array}\right.$$

Từ (2) suy ra

$$\left[\begin{array}{l} \alpha y+\beta=\sqrt{ax+b} \\ \alpha y+\beta=-\sqrt{ax+b} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\dfrac{\sqrt{ax+b}}{\alpha}-\dfrac{\beta}{\alpha} \\ y=-\dfrac{\sqrt{ax+b}}{\alpha}-\dfrac{\beta}{\alpha}. \end{array}\right.$$

Thay vào (1) ta được

$$\left[\begin{array}{l} (\alpha x+\beta)^2=\dfrac{a\sqrt{ax+b}}{\alpha}-\dfrac{a\beta}{\alpha}+b\ (*) \\ (\alpha x+\beta)^2=\dfrac{-a\sqrt{ax+b}}{\alpha}-\dfrac{a\beta}{\alpha}+b. \end{array}\right.$$

Đến đây bằng cách chọn α, β, a, b ta sẽ xây dựng được các phương trình vô tỉ. Cách giải các phương trình dạng này là đặt $\alpha y+\beta=\sqrt{ax+b}$ (hoặc $-\sqrt{ax+b}$) để đưa về hệ đối xứng loại II ở trên đã biết cách giải. Bây giờ ta sẽ đi xây dựng một số phương trình dạng này

Ví dụ 19. *Cho* $\alpha = 3$, $\beta = 2$, $a = 3$, $b = 8$ *thay vào* $(*)$ *ta được*

$$(3x+2)^2 = \sqrt{3x+8} + 6.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 26 (HSG tp Hồ Chí Minh năm học 2004-2005). *Giải phương trình*

$$9x^2 + 12x - 2 = \sqrt{3x+8}.$$

Giải. Điều kiện $x \geq -\frac{8}{3}$. Phương trình viết lại

$$(3x+2)^2 - 6 = \sqrt{3x+8}. \qquad (1)$$

Đặt $3y + 2 = \sqrt{3x+8}$, suy ra $(3y+2)^2 = 3x + 8$. Kết hợp với (1) ta có hệ

$$\begin{cases} (3x+2)^2 = 3y + 8 & (2) \\ (3y+2)^2 = 3x + 8. & (3) \end{cases}$$

Để x, y thoả mãn (1) và (2) thì $x \geq -\frac{8}{3}$ và $y \geq -\frac{8}{3}$. Lấy (2) trừ (3) ta được

$$3(x-y)(3x+3y+4) = 3(y-x) \Leftrightarrow (x-y)(3x+3y+5) = 0$$
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - y = 0 \\ 3x + 3y + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ 3y = -(3x+5). \end{array}\right.$$

- Với $y = x$, thay vào (2) ta được

$$(3x+2)^2 = 3x + 8 \Leftrightarrow 9x^2 + 9x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{1}{3} & \text{(nhận)} \\ x = -\frac{4}{3} & \text{(loại).} \end{array}\right.$$

- Với $y = -(3x+5)$, thay vào (2) ta được

$$(3x+2)^2 = -3x + 3 \Leftrightarrow 9x^2 + 15x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = \frac{-5+\sqrt{21}}{6} & \text{(loại)} \\ x = \frac{-5-\sqrt{21}}{6} & \text{(nhận).} \end{array}\right.$$

Các nghiệm của phương trình đã cho là $x = \frac{1}{3}$ và $x = \frac{-5-\sqrt{21}}{6}$.

Lưu ý. Có một phương pháp để tìm ra cách đặt $3y + 2 = \sqrt{3x+8}$ như sau : Ta sẽ đặt $my + n = \sqrt{3x+8}$, với m, n sẽ chọn sau sao cho hệ hai ẩn x, y thu được là hệ đối xứng loại hai. Từ $my + n = \sqrt{3x+8}$ và từ phương trình đã cho ta có hệ

$$\begin{cases} (my+n)^2 = 3x + 8 \\ 9x^2 + 12x - 2 = \sqrt{3x+8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m^2y^2 + 2mny + n^2 = 3x + 8 \\ 9x^2 + 12x - 2 = my + n. \end{cases}$$

Để là hệ đối xứng loại hai thì

$$\frac{m^2}{9}=\frac{2mn}{12}=\frac{3}{m}=\frac{8-n^2}{n}\Rightarrow\begin{cases} m=3\\ n=2.\end{cases}$$

Ví dụ 20. *Cho* $\alpha=1,\ \beta=1,\ a=\frac{1}{2},\ b=\frac{3}{2}$ *thay vào* $(*)$ *ta được*

$$(x+1)^2=\frac{\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\Leftrightarrow 2\left(x+1\right)^2=\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{3}{2}}+2.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 27. *Giải phương trình* $2x^2+4x=\sqrt{\frac{x+3}{2}}.$

Ví dụ 21. *Cho* $\alpha=2,\ \beta=-1,\ a=8000,\ b=1$ *thay vào* $(*)$ *ta được*

$$(2x-1)^2=4000\sqrt{8000x+1}+4001$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 28. *Giải phương trình*

$$x^2-x-1000\sqrt{8000x+1}=1000$$

Nếu xét hệ

$$\begin{cases}(\alpha x+\beta)^3=ay+b\\ (\alpha y+\beta)^3=ax+b.\end{cases}$$

Từ phương trình dưới ta được

$$\alpha y+\beta=\sqrt[3]{ax+b}\Leftrightarrow y=\frac{\sqrt[3]{ax+b}}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}.$$

Thay vào phương trình trên của hệ :

$$(\alpha x+\beta)^3=\frac{a\sqrt[3]{ax+b}}{\alpha}-\frac{a\beta}{\alpha}+b.$$

Ví dụ 22. *Chọn* $\alpha=1,\ \beta=1,\ a=3,\ b=5,$ *ta được*

$$(x+1)^3=3\sqrt[3]{3x+5}+2.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 29 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2009). *Giải phương trình*

$$x^3 + 3x^2 - 3\sqrt[3]{3x+5} = 1 - 3x.$$

Giải. Tập xác định $\mathbb{R}$. Phương trình đã cho tương đương

$$(x+1)^3 = 3\sqrt[3]{3x+5} + 2. \qquad (1)$$

Đặt $y + 1 = \sqrt[3]{3x+5}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} (x+1)^3 = 3y + 5 & (1) \\ (y+1)^3 = 3x + 5 & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$\begin{aligned} & (x+1)^3 - (y+1)^3 = -3(x-y) \\ \Leftrightarrow & (x-y)[(x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 + 3] = 0 \\ \Leftrightarrow & x = y \ \left(\text{do } (x+1)^2 + (x+1)(y+1) + (y+1)^2 \geq 0\right). \end{aligned}$$

Thay vào (1) ta được

$$(x+1)^3 = 3x + 5 \Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2. \end{array}\right.$$

Phương trình đã cho có hai nghiệm là $x = 1$ và $x = -2$.

Ví dụ 23. *Cho* $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $a = 4004$, $b = -2001$ *ta được*

$$(2x)^3 = 2002\sqrt[3]{4004x - 2001} - 2001.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 30. *Giải phương trình* $\left(\dfrac{8x^3 + 2001}{2002}\right)^3 = 4004x - 2001.$

1.1.7 Xây dựng phương trình vô tỉ dựa vào tính đơn điệu của hàm số.

Dựa vào kết quả "Nếu hàm số $y = f(x)$ đơn điệu thì $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$" ta có thể xây dựng được nhiều phương trình, hệ phương trình.

Ví dụ 24. *Xét hàm số* $f(t) = t^3 + t$ *đồng biến trên* $\mathbb{R}$. *Cho* $f(x+1) = f(\sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4})$ *ta được*

$$2(x+1)^3 + (x+1)^2 + 1 = 2(3x-1)\sqrt{3x-1} + 3x - 1 + 1.$$

Ta được bài toán sau

Bài toán 31 (HSG tp Hồ Chí Minh năm học 2004-2005). *Giải phương trình*

$$x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}.$$

Giải. Tập xác định $\mathbb{R}$. Đặt $y = \sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} x^3 - 4x^2 - 5x + 6 = y & (1) \\ 7x^2 + 9x - 4 = y^3 & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được

$$x^3 + 3x^2 + 4x + 2 = y^3 + y \Leftrightarrow (x+1)^3 + (x+1) = y^3 + y. \quad (3)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$. Vì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó (3) viết lại

$$f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x + 1 = y.$$

Bởi vậy

$$\sqrt[3]{7x^2 + 9x - 4} = x + 1 \Leftrightarrow 7x^2 + 9x - 4 = (x+1)^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 4x^2 - 6x + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-5)(x^2 + x - 1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5 \\ x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Ví dụ 25. *Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Cho*

$$f\left(\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}\right) = f(x-1).$$

ta được

$$-x^3 + 9x^2 - 19x + 11 + 2\sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} = (x-1)^3 + 2(x-1).$$

Khai triển và rút gọn ta được bài toán sau

Bài toán 32 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2009). *Giải phương trình*

$$x^3 - 6x^2 + 12x - 7 = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}.$$

Giải. Đặt $y = \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11}$. Ta có hệ

$$\begin{cases} y^3 = -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 \\ y = x^3 - 6x^2 + 12x - 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 \\ 2y = 2x^3 - 12x^2 + 24x - 14 \end{cases}$$

Cộng hai phương trình với nhau ta được

$$y^3 + 2y = x^3 - 3x^2 + 5x - 3 \Leftrightarrow y^3 + 2y = (x-1)^3 + 2(x-1). \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + 2t$. Với mọi $t_1 \neq t_2$, ta có

$$\frac{f(t_1) - f(t_2)}{t_1 - t_2} = t_1^2 + t_1 t_2 + t_2^2 + 2 = \left(t_1 + \frac{t_2}{2}\right)^2 + \frac{3t_2^2}{2} + 2 > 0.$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$\begin{aligned}(*) &\Leftrightarrow f(y) = f(x-1) \Leftrightarrow y = x - 1\\ &\Leftrightarrow \sqrt[3]{-x^3 + 9x^2 - 19x + 11} = x - 1\\ &\Leftrightarrow -x^3 + 9x^2 - 19x + 11 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1\\ &\Leftrightarrow x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0 \Leftrightarrow x \in \{1, 2, 3\}.\end{aligned}$$

Phương trình đã cho có ba nghiệm $x = 1, x = 2, x = 3$.

Ví dụ 26. *Xét hàm số* $f(t) = 2t^3 + t^2 + 1$ *đơn điệu trên* $[0; +\infty)$. *Cho*

$$f(x+1) = f\left(\sqrt{3x-1}\right)$$

ta được

$$2(x+1)^3 + (x+1)^2 + 1 = 2(3x-1)\sqrt{3x-1} + 3x - 1 + 1.$$

Ta được bài toán sau

Bài toán 33. *Giải phương trình*

$$2x^3 + 7x^2 + 5x + 4 = 2(3x-1)\sqrt{3x-1}.$$

Giải. Điều kiện $x \geq \frac{1}{3}$. Đặt $y = \sqrt{3x-1}$, $y \geq 0$. Ta có hệ

$$\begin{cases} 2x^3 + 7x^2 + 5x + 4 = 2y^3 \\ 3x - 1 = y^2. \end{cases}$$

Cộng theo vế hai phương trình trên ta được

$$2x^3 + 7x^2 + 8x + 3 = 2y^3 + y^2 \Leftrightarrow 2(x+1)^3 + (x+1)^2 = 2y^3 + y^2. \quad (*)$$

Xét hàm số $f(t) = 2t^3 + t^2$. Vì $f'(t) = 6t^2 + 2t \geq 0, \forall t \geq 0$ nên hàm số f đồng biến trên $[0; +\infty)$. Do đó

$$(*) \Leftrightarrow f(x+1) = f(y) \Leftrightarrow x + 1 = y \Leftrightarrow x + 1 = \sqrt{3x-1}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 \geq 0 \\ 3x + 1 = x^2 + 2x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1. \end{array}\right.$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 1$ là nghiệm duy nhất của PT đã cho.

Ví dụ 27. *Xét hàm số* $f(t) = t^3 + t$ *đơn điệu trên* $\mathbb{R}$. *Nếu cho* $f(2x) = f(\sqrt[3]{6x+1})$ *thì được*

$$8x^3 + 2x = 6x + 1 + \sqrt[3]{6x+1} \Leftrightarrow \sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1.$$

Ta được bài toán sau

Bài toán 34. *Giải phương trình* $\sqrt[3]{6x+1} = 8x^3 - 4x - 1$.

Ví dụ 28. *Xét hàm số* $f(t) = t\left(1 + \sqrt{t^2+2}\right)$. *Ta có*

$$f'(t) = 1 + \sqrt{t^2+2} + \frac{t^2}{\sqrt{t^2+2}} > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy hàm số $f(t) = t\left(1 + \sqrt{t^2+2}\right)$ *đồng biến trên* $\mathbb{R}$. *Cho* $f(2x+3) = f(-3x)$ *ta được*

$$(2x+3)\left(1 + \sqrt{4x^2+12x+11}\right) = -3x\left(1 + \sqrt{9x^2+2}\right).$$

Ta có bài toán

Bài toán 35. *Giải phương trình*

$$(2x+3)\sqrt{4x^2+12x+11} + 3x\left(1 + \sqrt{9x^2+2}\right) = -5x - 3.$$

Ví dụ 29. *Xét hàm số đồng biến trên khoảng* $(0; +\infty)$ *là*

$$f(t) = \log_2 t - 2t + t^2, \forall t > 0.$$

Cho $f\left(\sqrt{x+2}\right) = f\left(2 + \frac{1}{x}\right)$ *ta được*

$$\log_2 \sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+2} + x + 2 = \log_2\left(2 + \frac{1}{x}\right) - 2\left(2 + \frac{1}{x}\right) + \left(2 + \frac{1}{x}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2(x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 36 (HSG Đại học Vinh năm học 2009-2010). *Giải phương trình*

$$\frac{1}{2}\log_2(x+2) + x + 3 = \log_2 \frac{2x+1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\sqrt{x+2}.$$

Giải. Điều kiện

$$\begin{cases} x \in (-2; +\infty) \\ x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left(-2; -\frac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty).$$

Khi đó phương trình viết lại

$$\log_2\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+2}+x+2=\log_2\left(2+\frac{1}{x}\right)-2\left(2+\frac{1}{x}\right)+\left(2+\frac{1}{x}\right)^2. \qquad (1)$$

Xét hàm số $f(t)=\log_2 t-2t+t^2, \forall t>0$. Ta có

$$f'(t)=\frac{1}{t.\ln 2}+2t-2\geq 2\sqrt{\frac{1}{t.\ln 2}.2t}-2=2\sqrt{\frac{2}{\ln 2}}-2>0$$

Vậy hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$, do đó

$$(1)\Leftrightarrow f\left(\sqrt{x+2}\right)=f\left(2+\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow\sqrt{x+2}=2+\frac{1}{x}. \qquad (2)$$

Với điều kiện $x\in\left(-2;-\frac{1}{2}\right)\cup(0;+\infty)$, bình phương hai vế phương trình (2) ta được

$$x+2=4+\frac{4}{x}+\frac{1}{x^2}\Leftrightarrow x^3-2x^2-4x-1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}.\end{array}\right.$$

Kết hợp với đk, ta thấy PT đã cho có hai nghiệm $x=-1$ và $x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}$.

Ví dụ 30. *Xét hàm số đồng biến trên khoảng $\mathbb{R}$ là $f(t)=t^5+t$. Cho $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(y)$ ta được*

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5+\frac{x}{y}=y^5+y\Leftrightarrow x^5+xy^4=y^{10}+y^6.$$

Mặt khác do $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ nên

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(y)\Leftrightarrow\frac{x}{y}=y\Leftrightarrow x=y^2.$$

Lấy $x=1$, khi đó

$$\sqrt{4x+5}+\sqrt{x+8}=6.$$

Vậy ta có bài toán sau

Bài toán 37 (HSG Bình Định năm học 2009-2010). *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases}x^5+xy^4=y^{10}+y^6 & (1)\\ \sqrt{4x+5}+\sqrt{y^2+8}=6. & (2)\end{cases}$$

Giải. Điều kiện $4x+5 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{5}{4}$.

• Xét $y = 0$. Từ (1) suy ra $x = 0$ và phương trình (2) không được thoả mãn.

• Xét $y \neq 0$. Chia cả hai vế của (1) cho y^5 ta được

$$\left(\frac{x}{y}\right)^5 + \frac{x}{y} = y^5 + y. \tag{3}$$

Xét hàm số $f(t) = t^5 + t, \forall t \in \mathbb{R}$. Ta có

$$f'(t) = 5t^4 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}.$$

Vậy hàm $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$. Do đó

$$(3) \Leftrightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{y} = y \Leftrightarrow x = y^2.$$

Thay vào (2) ta được

$$\sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8} = 6. \tag{4}$$

Xét hàm số $g(x) = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x+8}, \forall x \geq -\dfrac{5}{4}$. Vì

$$g'(x) = \frac{2}{\sqrt{4x+5}} + \frac{1}{2\sqrt{x+8}} > 0, \forall x \geq -\frac{5}{4}$$

nên hàm số $g(x)$ đồng biến trên $\left[-\dfrac{5}{4}; +\infty\right)$. Hơn nữa $g(1) = 6$. Vậy $x = 1$ là nghiệm duy nhất của (4). Suy ra $y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$. Vậy hệ có hai nghiệm là

$$(x; y) = (1; 1),\ (x; y) = (1; -1).$$

1.1.8 Xây dựng phương trình vô tỉ dựa vào các phương trình lượng giác.

Từ một phương trình lượng giác đơn giản nào đó, kết hợp với các phép biến đổi lượng giác thì sẽ tìm ra các phương trình vô tỉ hay.

Ví dụ 31. *Từ phương trình* $\cos 3t = \sin t$*, với* $t \in [0; \pi]$*, ta thấy phương trình này tương đương với*

$$4\cos^3 t - 3\cos t = \sqrt{1 - \cos^2 t}.$$

Đặt $x = \cos t$ *ta được bài toán sau*

Bài toán 38 (Đề nghị Olympic 30/04/2003-toán 10). *Giải phương trình*

$$4x^3 - 3x = \sqrt{1 - x^2}.$$

Nếu thay x bởi $x-1$ ta được bài toán khó hơn.

Bài toán 39. *Giải phương trình* $4x^3-12x^2+9x-1=\sqrt{2x-x^2}$.

Ví dụ 32. *Từ phương trình* $\cos 3t=\cos\frac{t}{2}$, *với* $t\in[0;\pi]$, *ta thấy phương trình này tương đương với*

$$8\cos^3 t-6\cos t=\sqrt{2(1+\cos t)}.$$

Đặt $x=2\cos t$ *ta được bài toán sau*

Bài toán 40 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2006). *Giải phương trình*

$$x^3-3x=\sqrt{x+2}. \tag{1}$$

Giải. Điều kiện $x\geq -2$. Nếu $x>2$ thì

$$x^3-3x=x+x(x^2-4)>x>\sqrt{2x}=\sqrt{x+x}>\sqrt{x+2}.$$

Vậy $x>2$ không thoả mãn (1), do đó để giải PT (1), chỉ cần xét $-2\leq x\leq 2$. Khi đó đặt $x=2\cos t$, điều kiện $t\in[0;\pi]$. Thay vào (1) ta được

$$8\cos^3 t-6\cos t=\sqrt{2\left(1+\cos t\right)}\Leftrightarrow 4\cos^3 t-3\cos t=\cos\frac{t}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 3t=\cos\frac{t}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}3t=\frac{t}{2}+k2\pi\\ 3t=-\frac{t}{2}+k2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{k4\pi}{5}\\ t=\frac{k4\pi}{7}\end{array}\right.\ (k\in\mathbb{Z}).$$

Do $t\in[0;\pi]$ nên chỉ lấy các nghiệm $t=0$, $t=\frac{4\pi}{5}$, $t=\frac{4\pi}{7}$. Phương trình đã cho có ba nghiệm

$$x=2,\ x=2\cos\frac{4\pi}{5},\ x=2\cos\frac{4\pi}{7}.$$

Ví dụ 33. *Từ phương trình* $\sin 3t=\cos t$,*với* $t\in[0;\pi]$, *ta thấy phương trình này tương đương với*

$$\begin{aligned}3\sin t-4\sin^3 t=\cos x&\Leftrightarrow \sin t\left(3-4\sin^2 t\right)=\cos t\\ &\Leftrightarrow\sqrt{1-\cos^2 t}\left(4\cos^2 t-1\right)=\cos t\\ &\Leftrightarrow\sqrt{1-\cos^2 t}=\frac{\cos t}{4\cos^2 t-1}.\end{aligned}$$

Lấy $x=\cos t$ *ta được bài toán sau*

Bài toán 41. *Giải phương trình* $\sqrt{1-x^2}=\frac{x}{4x^2-1}$.

Giải. Từ điều kiện $|x| \leq 1$, $x \neq \frac{1}{2}$ và $x \neq -\frac{1}{2}$, ta đặt

$$x = \cos t,\ t \in [0; \pi],\ x \neq \frac{\pi}{3},\ x \neq \frac{2\pi}{3}.$$

Thay vào phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-\cos^2 t} = \frac{\cos t}{4\cos^2 t - 1} \Leftrightarrow \sqrt{1-\cos^2 t}\left(4\cos^2 t - 1\right) = \cos t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left(4 - 4\sin^2 t - 1\right) = \cos t \Leftrightarrow \sin t\left(3 - 4\sin^2 t\right) = \cos t\\
\Leftrightarrow &3\sin t - 4\sin^3 t = \cos x \Leftrightarrow \sin 3t = \cos t \Leftrightarrow \sin 3t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right)\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l} 3t = \frac{\pi}{2} - t + k2\pi \\ 3t = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - t\right) + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} \\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Trên đoạn $[0; \pi]$, ta nhận được các nghiệm $t_1 = \frac{\pi}{8}$, $t_2 = \frac{5\pi}{8}$, $t_3 = \frac{\pi}{4}$. Nghiệm của phương trình đã cho là

$$\cos\frac{\pi}{8},\ \cos\frac{5\pi}{8},\ \cos\frac{\pi}{4}.$$

Ví dụ 34. *Ta có công thức*

$$\sin 5\alpha = 16\sin^5\alpha - 20\sin^3\alpha + 5\sin\alpha.$$

Từ phương trình $\sin 5t = \cos t$*,với* $t \in [0; \pi]$*, ta thấy phương trình này tương đương với*

$$\begin{aligned}
&16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t = \cos t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left(16\sin^4 t - 20\sin^2 t + 5\right) = \cos t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left[16\left(1 - \sin^2 t\right)^2 - 12\left(1 - \sin^2 t\right) + 1\right] = \cos t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left(16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1\right) = \cos t\\
\Leftrightarrow &\sqrt{1-\cos^2 t} = \frac{\cos t}{16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1}.
\end{aligned}$$

Lấy $x = \cos t$ *ta được bài toán sau*

Bài toán 42. *Giải phương trình* $\sqrt{1-x^2} = \frac{x}{16x^4 - 12x^2 + 1}$.

Hướng dẫn. Từ điều kiện $|x| \geq 1$ và $16x^4 - 12x^2 + 1 \neq 0$, ta đặt

$$x = \cos t,\ t \in [0; \pi],\ \text{điều kiện } 16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1 \neq 0.$$

Thay vào phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-\cos^2 t} = \frac{\cos t}{16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1}\\
\Leftrightarrow &\sin t\left(16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1\right) = \cos t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left[16\left(1-\sin^2 t\right)^2 - 12\left(1-\sin^2 t\right) + 1\right] = \cos t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left(16\sin^4 t - 20\sin^2 t + 5\right) = \cos t\\
\Leftrightarrow &16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t = \cos t \Leftrightarrow \sin 5t = \cos t\\
\Leftrightarrow &\sin 5t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{k\pi}{3} \\ t = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Ví dụ 35. *Từ phương trình* $\sin 5t = \cos 3t$*,với* $t \in [0;\pi]$*, ta thấy phương trình này tương đương với*

$$\begin{aligned}
&16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t = \cos 3t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left(16\sin^4 t - 20\sin^2 t + 5\right) = 4\cos^3 t - 3\cos t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left[16\left(1-\sin^2 t\right)^2 - 12\left(1-\sin^2 t\right) + 1\right] = 4\cos^3 t - 3\cos t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left(16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1\right) = 4\cos^3 t - 3\cos t\\
\Leftrightarrow &\sqrt{1-\cos^2 t} = \left(16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1\right) = 4\cos^3 t - 3\cos t.
\end{aligned}$$

Lấy $x = \cos t$ *ta được bài toán sau*

Bài toán 43. *Giải phương trình* $\sqrt{1-x^2}\left(16x^4 - 12x^2 + 1\right) = 4x^3 - 3x.$

Hướng dẫn. Từ điều kiện $|x| \geq 1$, ta đặt $x = \cos t$, $t \in [0;\pi]$. Thay vào phương trình đã cho ta được

$$\begin{aligned}
&\sqrt{1-\cos^2 t}\left(16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1\right) = 4\cos^3 t - 3\cos t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left(16\cos^4 t - 12\cos^2 t + 1\right) = 4\cos^3 t - 3\cos t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left[16\left(1-\sin^2 t\right)^2 - 12\left(1-\sin^2 t\right) + 1\right] = \cos 3t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left(16\sin^4 t - 20\sin^2 t + 5\right) = \cos 3t\\
\Leftrightarrow &16\sin^5 t - 20\sin^3 t + 5\sin t = \cos 3t \Leftrightarrow \sin 5t = \cos 3t\\
\Leftrightarrow &\sin 5t = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 3t\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{\pi}{16} + \dfrac{k\pi}{4} \\ t = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).
\end{aligned}$$

Ví dụ 36. *Từ phương trình* $\sin\left(3t - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$*, với* $t \in [0;\pi]$*, ta thấy phương trình này tương đương với*

$$
\begin{aligned}
&\sin 3t - \cos 3t = \sin t + \cos t\\
\Leftrightarrow &3\sin t - 4\sin^3 t - 4\cos^3 t + 3\cos t = \sin t + \cos t\\
\Leftrightarrow &2\cos t + 3\sin t - 4\sin^3 t = 4\cos^3 t + \sin t\\
\Leftrightarrow &2\cos t + \sin t\left(3 - 4\sin^2 t\right) = 4\cos^3 t + \sin t\\
\Leftrightarrow &2\cos t + \sin t\left(4\cos^2 t - 1\right) = 4\cos^3 t + \sin t\\
\Leftrightarrow &2\cos t + \sqrt{1-\cos^2 t}\left(4\cos^2 t - 1\right) = 4\cos^3 t + \sqrt{1-\cos^2 t}.
\end{aligned}
$$

Lấy $x = \cos t$ *ta được bài toán sau*

Bài toán 44. *Giải phương trình*

$$2x + (4x^2-1)\sqrt{1-x^2} = 4x^3 + \sqrt{1-x^2}.$$

Hướng dẫn. Từ điều kiện $|x| \geq 1$, ta đặt $x = \cos t$, $t \in [0;\pi]$. Thay vào phương trình đã cho ta được

$$
\begin{aligned}
&2\cos t + \left(4\cos^2 t - 1\right)\sqrt{1-\cos^2 t} = 4\cos^3 t + \sqrt{1-\cos^2 t}\\
\Leftrightarrow &2\cos t + \left(4\cos^2 t - 1\right)\sin t = 4\cos^3 t + \sin t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left(4\cos^2 t - 2\right) = 4\cos^3 t - 2\cos t\\
\Leftrightarrow &\sin t\left(2\cos^2 t - 1\right) = \cos t\left(2\cos^2 t - 1\right)\\
\Leftrightarrow &\left(2\cos^2 t - 1\right)(\sin t - \cos t) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2t = 0\\ \sin t = \cos t\end{array}\right.\\
\Leftrightarrow &\left[\begin{array}{l}2t = \frac{\pi}{2} + k\pi\\ \tan t = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\\ t = \frac{\pi}{4} + k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}.
\end{aligned}
$$

1.1.9 Sử dụng căn bậc n của số phức để sáng tạo và giải hệ phương trình.

Cho số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$. Khi đó các căn bậc n của z là

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

• Các căn bậc hai của số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$ là

$$z_0 = \sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),\ z_1 = -\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right).$$

• Các căn bậc ba của số phức $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $r > 0$ là

$$\begin{aligned} z_0 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{3} + i\sin\frac{\varphi}{3}\right), \\ z_1 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi}{3}\right), \\ z_2 &= \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\varphi + 4\pi}{3}\right). \end{aligned}$$

Một phương trình nghiệm phức $f(z) = 0$, với $z = x + iy$, ta biến đổi thành

$$h(x, y) + ig(x, y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} h(x, y) = 0 \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Nghĩa là một phương trình nghiệm phức, bằng cách tách phần thực và phần ảo luôn có thể đưa về hệ phương trình.

1. Sáng tác các hệ phương trình bằng cách luỹ thừa ba một số phức cho trước.

Để tìm căn bậc ba của số phức $1 + i$, ta tìm số phức $z = x + iy$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ sao cho

$$\begin{aligned} &(x + iy)^3 = 1 + i \Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = 1 + i \\ &\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = 1 + i \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Giải hệ này ta tìm được x và y, từ đó có z. Tuy nhiên, có thể tìm z bằng cách khai căn bậc ba của $1 + i$ như sau : Ta có

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Vậy các căn bậc ba của $1 + i$ là

$$z_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right),$$

$$z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$
$$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+4\pi}{3}\right) = \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

Từ đây, ngược lại ta đã tìm được nghiệm của hệ $\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 1 \end{cases}$ là

$$\begin{cases} x = \sqrt[6]{2}\cos\frac{\pi}{12} \\ y = \sqrt[6]{2}\sin\frac{\pi}{12} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[6]{2}\cos\frac{3\pi}{4} \\ y = \sqrt[6]{2}\sin\frac{3\pi}{4} \end{cases}; \begin{cases} x = \sqrt[6]{2}\cos\frac{17\pi}{12} \\ y = \sqrt[6]{2}\sin\frac{17\pi}{12}. \end{cases}$$

Ví dụ 37. *Xét số phức* $z = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 5\left.\quad\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$. *Giả sử* $x + yi$ *là số phức thoả mãn điều kiện*

$$(x+yi)^3 = 5\left.\quad\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$
$$\Leftrightarrow 2x^3 - 6xy^2 + (6x^2y - 2y^3)i = 5 + 5\sqrt{3}i \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^3 - 6xy^2 = 5 \\ 6x^2y - 2y^3 = 5\sqrt{3}. \end{cases}$$

Ta được bài toán sau

Bài toán 45. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} 2x^3 - 6xy^2 = 5 & (1) \\ 6x^2y - 2y^3 = 5\sqrt{3} & (2). \end{cases}$

Giải.

Nhân hai vế của (2) với i rồi cộng với (1) ta được

$$2x^3 - 6xy^2 + (6x^2y - 2y^3)i = 5 + 5\sqrt{3}i$$
$$\Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$
$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2yi + 3xy^2i^2 + y^3i^3 = \frac{5}{2} + \frac{5\sqrt{3}}{2}i$$
$$\Leftrightarrow (x+yi)^3 = 5\left.\quad\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Vậy $x + yi$ là một căn bậc ba của số phức

$$z = 5\left.\quad\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 5\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Mà z có các căn bậc ba là

$$z_0 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right),$$
$$z_1 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{7\pi}{9} + i\sin\frac{7\pi}{9}\right),$$
$$z_2 = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+4\pi}{3}\right) = \sqrt[3]{5}\left(\cos\frac{13\pi}{9} + i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$$

Vậy các nghiệm của hệ phương trình là

$$\begin{cases} x = \sqrt[3]{5}\cos\frac{\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5}\sin\frac{\pi}{9} \end{cases};\begin{cases} x = \sqrt[3]{5}\cos\frac{7\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5}\sin\frac{7\pi}{9} \end{cases};\begin{cases} x = \sqrt[3]{5}\cos\frac{13\pi}{9} \\ y = \sqrt[3]{5}\sin\frac{13\pi}{9}. \end{cases}$$

2. Sáng tác các hệ phương trình từ hai số phức cho trước.

Ví dụ 38. *Xét hai số phức z_1 và z_2 như sau*

$$\begin{cases} z_1 = 7 - \sqrt{5}i \\ z_2 = \sqrt{5}i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 7 \\ z_1 z_2 = 7\sqrt{5}i + 5 \end{cases}$$

Vậy z_1 và z_2 là nghiệm của phương trình

$$z^2 - 7z + 5 + 7\sqrt{5}i = 0 \Leftrightarrow z - 7 + \frac{5 + 7\sqrt{5}i}{z} = 0$$
$$\Leftrightarrow z + \frac{5}{z} + \frac{7\sqrt{5}i}{z} = 7 \Leftrightarrow z + \frac{5\overline{z}}{z\overline{z}} + \frac{7\sqrt{5}i\overline{z}}{z\overline{z}} = 7$$

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó phương trình trên viết lại

$$x + yi + \frac{5(x - yi)}{x^2 + y^2} + \frac{7\sqrt{5}(xi + y)}{x^2 + y^2} = 7$$
$$\Leftrightarrow x + yi + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2}i = 7$$
$$\Leftrightarrow x + \frac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} - 7 + \left. \quad y + \frac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2}\right) i = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \dfrac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} - 7 = 0 \\ y + \dfrac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 46. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x + \dfrac{5x + 7\sqrt{5}y}{x^2 + y^2} = 7 \\ y + \dfrac{7\sqrt{5}x - 5y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$

Hướng dẫn. Từ cách xây dựng hệ phương trình ta thấy ngay hệ có hai nghiệm là

$$\begin{cases} x = 7 \\ y = -\sqrt{5} \end{cases} \text{ và } \begin{cases} x = 0 \\ y = \sqrt{5}. \end{cases}$$

Bài toán 47. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 \\ y - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2} = 0. \end{cases}$

Giải. Điều kiện $x^2 + y^2 \neq 0$. Xét số phức $z = x + iy$. Khi đó

$$iz = ix - y,\ x^2 + y^2 = |z|^2 = z.\overline{z}$$

Hệ phương trình đã cho viết lại

$$\begin{cases} x + \dfrac{3x - y}{x^2 + y^2} = 3 & (1) \\ yi - \dfrac{x + 3y}{x^2 + y^2}i = 0. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$x - yi + \frac{3x - y}{x^2 + y^2} + \frac{x + 3y}{x^2 + y^2}i = 3 \Leftrightarrow x - yi + \frac{3(x + yi)}{x^2 + y^2} - \frac{y - xi}{x^2 + y^2} = 3.$$

Hay

$$\overline{z} + 3\frac{z}{z.\overline{z}} + \frac{iz}{z.\overline{z}} = 3 \Leftrightarrow \overline{z} + 3\frac{1}{\overline{z}} + \frac{i}{\overline{z}} = 3 \Leftrightarrow (\overline{z})^2 - 3\overline{z} + 3 + i = 0.$$

Ta có $\Delta = 9 - 4(3 + i) = -3 - 4i$. Xét số phức $a + bi$ thoả mãn điều kiện

$$-3 - 4i = (a + bi)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ b = -\dfrac{2}{a}. \end{cases}$$

Khi đó

$$a^2 - \frac{4}{a^2} = -3 \Leftrightarrow a^4 + 3a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1.$$

Vậy $(a; b) = (1; -2)$; $(a; b) = (-1; 2)$. Do đó $\Delta = -3 - 4i$ có hai căn bậc hai là $\pm(1 - 2i)$. Suy ra

$$\left[\begin{array}{l} \overline{z} = \dfrac{3 + (1 - 2i)}{2} = 2 - i \\ \overline{z} = \dfrac{3 - (1 - 2i)}{2} = 1 + i. \end{array}\right.$$

Nghĩa là

$$\left[\begin{array}{l} x - yi = 2 - i \\ x - yi = 1 + i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (x; y) = (2; 1) \\ (x; y) = (1; -1). \end{array}\right.$$

Vậy hệ PT đã cho có hai nghiệm là $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1. \end{cases}$

Ví dụ 39. *Xét hai số phức*

$$\begin{cases} z_1 = \sqrt{2} - i \\ z_2 = 2\sqrt{2} + 2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = 3\sqrt{2} + i \\ z_1 z_2 = 6. \end{cases}$$

Khi đó z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình

$$z^2 - \left(3\sqrt{2} + i\right) z + 6 = 0 \Leftrightarrow z + \frac{6}{z} = 3\sqrt{2} + i \Leftrightarrow z + \frac{6\overline{z}}{z.\overline{z}} = 3\sqrt{2} + i.$$

Giả sử $z = u + vi$, khi đó phương trình viết lại

$$\begin{aligned} & u + vi + \frac{6(u - vi)}{u^2 + v^2} = 3\sqrt{2} + i \\ \Leftrightarrow & u + \frac{6u}{u^2 + v^2} + \left(v - \frac{6v}{u^2 + v^2}\right) = 3\sqrt{2} + i \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} u + \dfrac{6u}{u^2 + v^2} = 3\sqrt{2} \\ v - \dfrac{6v}{u^2 + v^2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u\left(1 + \dfrac{6}{u^2 + v^2}\right) = 3\sqrt{2} \\ v\left(1 - \dfrac{6}{u^2 + v^2}\right) = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Lấy $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$, ta được

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{3}\left(1 + \dfrac{6}{x + y}\right) = \sqrt{2} \\ \sqrt{y}\left(1 - \dfrac{6}{x + y}\right) = 1. \end{cases}$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 48. *Giải hệ phương trình* $\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}}{3}\left(1 + \dfrac{6}{x + y}\right) = \sqrt{2} \\ \sqrt{y}\left(1 - \dfrac{6}{x + y}\right) = 1. \end{cases}$

Bài toán 49 (HSG quốc gia-1996). *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \sqrt{3x}\left(1 + \dfrac{1}{x + y}\right) = 2 \\ \sqrt{7y}\left(1 - \dfrac{1}{x + y}\right) = 4\sqrt{2}. \end{cases}$$

Giải. Điều kiện $x > 0$ và $y > 0$. Đặt $u = \sqrt{x}$, $v = \sqrt{y}$. Hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} u\left(1 + \dfrac{1}{u^2+v^2}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ v\left(1 - \dfrac{1}{u^2+v^2}\right) = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases}$$

Vì $u^2 + v^2$ là bình phương của môđun của số phức $z = u + iv$ nên ta biến đổi hệ phương trình thành

$$\begin{cases} u + \dfrac{u}{u^2+v^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \\ v - \dfrac{v}{u^2+v^2} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + \dfrac{u}{u^2+v^2} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} & (1) \\ iv - \dfrac{iv}{u^2+v^2} = \dfrac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}} & (2) \end{cases}$$

Cộng (1) và (2) theo vế ta được

$$u + iv + \frac{u - iv}{u^2+v^2} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}. \tag{3}$$

Vì $\dfrac{u-iv}{u^2+v^2} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2} = \dfrac{\overline{z}}{z.\overline{z}} = \dfrac{1}{z}$ nên (3) viết lại

$$z + \frac{1}{z} = \frac{2}{\sqrt{3}} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{7}} \Leftrightarrow z^2 - 2\left.\quad \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}\right) z + 1 = 0. \tag{4}$$

Ta có

$$\Delta' = \left.\quad \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2\sqrt{2}i}{\sqrt{7}}\right)^2 - 1 = \frac{1}{3} - \frac{8}{7} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{21}} - 1 = -\frac{38}{21} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{21}}.$$

Xét số phức $a + bi$ thoả mãn điều kiện

$$-\frac{38}{21} + \frac{4\sqrt{2}i}{\sqrt{21}} = (a+bi)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - b^2 = -\dfrac{38}{21} \\ 2ab = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{21}} \end{cases}$$

Khi đó

$$a^2 - \frac{8}{21a^2} = \frac{-38}{21} \Leftrightarrow 21a^4 + 38a^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow a^2 = \frac{-19+23}{21} = \frac{4}{21}.$$

Vậy $(a; b) = \left(\dfrac{2}{\sqrt{21}}; \sqrt{2}\right)$; $(a; b) = \left(-\dfrac{2}{\sqrt{21}}; -\sqrt{2}\right)$. Do đó

$$z = u + iv = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \pm \frac{2}{\sqrt{21}}\right) + \left.\quad \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} \pm \sqrt{2}\right) i.$$

Vì $u > 0$ và $v > 0$ nên $\begin{cases} u = \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{21}} \\ v = \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2}. \end{cases}$ Do đó

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}} + \dfrac{2}{\sqrt{21}}\right)^2 = \dfrac{11}{21} + \dfrac{4}{3\sqrt{7}} \\ y = \quad \dfrac{2\sqrt{2}}{\sqrt{7}} + \sqrt{2}\Bigg)^2 = \dfrac{22}{7} + \dfrac{8}{\sqrt{7}}. \end{cases}$$

Hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là

$$\begin{cases} x = \dfrac{11}{21} + \dfrac{4}{3\sqrt{7}} \\ y = \dfrac{22}{7} + \dfrac{8}{\sqrt{7}}. \end{cases}$$

Bài toán 50 (HSG Quốc gia năm học 2006-2007). *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{x} = 2 \\ \left(1 + \dfrac{12}{y+3x}\right)\sqrt{y} = 6. \end{cases}$$

Giải. Điều kiện $x \ge 0$, $y \ge 0$, $y + 3x \ne 0$. Đặt $u = \sqrt{3x} \ge 0$, $v = \sqrt{y} \ge 0$. Thay vào hệ ta được

$$\begin{cases} \left(1 - \dfrac{12}{u^2+v^2}\right)\dfrac{u}{\sqrt{3}} = 2 \\ \left(1 + \dfrac{12}{u^2+v^2}\right)v = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u - \dfrac{12u}{u^2+v^2} = 2\sqrt{3} & (1) \\ v + \dfrac{12v}{u^2+v^2} = 6. & (2) \end{cases}$$

Nhân PT (2) với i, sau đó cộng với PT (1) ta được

$$u + vi - \frac{12(u - vi)}{u^2+v^2} = 2\sqrt{3} + 6i. \tag{3}$$

Xét số phức $z = u + vi$, với $u \ge 0$, $v \ge 0$. Khi đó (3) viết lại

$$z - \frac{12\overline{z}}{z.\overline{z}} = 2\sqrt{3} + 6i \Leftrightarrow z - \frac{12}{z} = 2(\sqrt{3} + 3i)$$
$$\Leftrightarrow z^2 - 2(\sqrt{3} + 3i)z - 12 = 0. \tag{4}$$

Ta có

$$\Delta' = (\sqrt{3} + 3i)^2 + 12 = -6 + 6\sqrt{3}i + 12 = 6 + 6\sqrt{3}i$$

$$= 12 \left. \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) = 12 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Vậy Δ' có hai căn bậc hai là

$$\pm\sqrt{12} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \pm\sqrt{12} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i \right) = \pm \left(3 + \sqrt{3} i \right).$$

Từ (4) ta có

$$\left[\begin{array}{l} z = \sqrt{3} + 3i + 3 + \sqrt{3}i = \sqrt{3} + 3 + \left(3 + \sqrt{3}\right) i \\ z = \sqrt{3} + 3i - 3 - \sqrt{3}i = \sqrt{3} - 3 + \left(3 - \sqrt{3}\right) i. \end{array} \right.$$

Do $u \geq 0$ và $v \geq 0$ nên

$$\left\{ \begin{array}{l} u = \sqrt{3} + 3 \\ v = \sqrt{3} + 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{\left(\sqrt{3} + 3\right)^2}{3} \\ y = \left(\sqrt{3} + 3\right)^2 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ y = 3\left(4 + 2\sqrt{3}\right). \end{array} \right.$$

Hệ đã cho có nghiệm duy nhất $\left\{ \begin{array}{l} x = 4 + 2\sqrt{3} \\ y = 3\left(4 + 2\sqrt{3}\right). \end{array} \right.$

1.1.10 Sử dụng bất đẳng thức lượng giác trong tam giác để sáng tạo ra các phương trình lượng giác hai ẩn và xây dựng thuật giải.

Trong đề thi vào Đại học Nông nghiệp 1, năm 1995 có bài toán sau

Bài toán 51. *Giải phương trình*

$$\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2(x + y) = \frac{9}{4}. \tag{1}$$

Phương trình này khiến ta liên tưởng đến một bất đẳng thức cơ bản trong tam giác : Với mọi tam giác ABC ta có

$$\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C \leq \frac{9}{4}, \tag{2}$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$.
Trong vế trái của bất đẳng thức (2), lấy $A = x$, $B = y$, $C = \pi - (x + y)$, ta thu được vế trái của phương trình (1). Lời giải của phương trình (1) cũng thu được dựa trên cơ sở phép chứng minh bất đẳng thức lượng giác (2).
Giải. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 1 - \frac{\cos 2x + \cos 2y}{2} + \sin^2(x + y) = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos(x+y)\cos(x-y)+1-\cos^2(x+y)=\frac{9}{4}$$
$$\Leftrightarrow \cos^2(x+y)+\cos(x-y)\cos(x+y)+\frac{1}{4}=0. \tag{3}$$

Phương trình (3) là phương trình bậc hai đối với $\cos(x+y)$, ta có

$$\Delta=\cos^2(x-y)-1\geq 0.$$

Vì $\cos^2(x-y)\leq 1$ nên để phương trình có nghiệm thì $\cos^2(x-y)=1$. Do đó

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos(x-y)=1\\ \cos(x+y)=-\dfrac{\cos(x-y)}{2}=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\cos(x-y)=-1\\ \cos(x+y)=-\dfrac{\cos(x-y)}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x-y=k2\pi\\ x+y=\pm\dfrac{2\pi}{3}+l2\pi\end{cases} & (4)\\ \begin{cases}x-y=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x+y=\pm\dfrac{\pi}{3}+l2\pi.\end{cases} & (5)\end{array}\right.$$

Ta có

$$(4)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=k2\pi\\ x+y=\dfrac{2\pi}{3}+l2\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=k2\pi\\ x+y=-\dfrac{2\pi}{3}+l2\pi\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{\pi}{3}+k\pi+l\pi\\ y=\dfrac{\pi}{3}+l\pi-k\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi+l\pi\\ y=-\dfrac{\pi}{3}+l\pi-k\pi.\end{cases}\end{array}\right.$$

$$(5)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x+y=\dfrac{\pi}{3}+l2\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x-y=-\dfrac{\pi}{2}+k2\pi\\ x+y=-\dfrac{\pi}{3}+l2\pi\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-\dfrac{\pi}{12}+k\pi+l\pi\\ y=\dfrac{5\pi}{12}+l\pi-k\pi\end{cases}\\ \begin{cases}x=-\dfrac{5\pi}{12}+k\pi+l\pi\\ y=\dfrac{\pi}{12}+l\pi-k\pi.\end{cases}\end{array}\right.$$

Cách khác (tiếp nối từ (3)). Ta có

$$(3)\Leftrightarrow\left[\cos(x+y)+\frac{1}{2}\cos(x-y)\right]^2+\frac{1}{4}\sin^2(x-y)=0$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(x+y)+\dfrac{1}{2}\cos(x-y)=0\\ \sin(x-y)=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow\begin{cases}\cos(x+y)+\dfrac{1}{2}\cos(x-y)=0\\ \cos(x-y)=\pm 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos(x-y)=1 \\ \cos(x+y)=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos(x-y)=-1 \\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Theo trên ta suy ra một hướng để sáng tác một loạt các phương trình lượng giác hai ẩn khá thú vị là : Từ một bất đẳng thức cơ bản trong tam giác, trong bất đẳng thức đó chứa các góc A, B, C của một tam giác, ta lần lượt lấy

$$A=f(x,y), B=g(x,y), C=\pi-[f(x,y)+g(x,y)],$$

và thay dấu bất đẳng thức bởi dấu đẳng thức, ta sẽ được một phương trình lượng giác hai ẩn x và y tương ứng. Còn việc giải phương trình thì thường được tiến hành tương tự như hai cách giải đã trình bày ở trên. Chú ý rằng cách làm như trên không phải lúc nào cũng thành công, có thể ta xây dựng được những phương trình lượng giác hai ẩn nhưng ta lại không giải được những phương trình mà ta vừa xây dựng nên. Tuy nhiên đây là một phương pháp sáng tác bài toán rất đáng quan tâm, nó cho ta nhiều phương trình thú vị cả đề bài lẫn lời giải.

Ví dụ 40. *Xét bất đẳng thức*

$$\cos A+\cos B+\cos C \le \frac{3}{2}, \forall \Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$. Lấy $A=x$, $B=y$, $C=\pi-(x+y)$, ta được bài toán sau

Bài toán 52. *Giải phương trình*

$$\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} &2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}-\left(2\cos^2\frac{x+y}{2}-1\right)=\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow &2\cos^2\frac{x+y}{2}-2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\frac{1}{2}=0 \\ \Leftrightarrow &\cos^2\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\frac{1}{4}=0 \\ \Leftrightarrow &\left(\cos\frac{x+y}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{x-y}{2}=0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} \\ \sin\dfrac{x-y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-y}{2} \\ \cos\dfrac{x-y}{2} = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = 1 \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\dfrac{x-y}{2} = -1 \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ví dụ 41. *Cũng xét bất đẳng thức*

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}, \forall \Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$. *Lấy*

$$A = x - \frac{y}{2},\ B = \frac{3y}{2},\ C = \pi - \left[\left(x - \frac{y}{2}\right) + \frac{3y}{2}\right] = \pi - (x+y),$$

ta được bài toán sau

Bài toán 53. *Giải phương trình*

$$\cos\left(x - \frac{y}{2}\right) + \cos\frac{3y}{2} - \cos(x+y) = \frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương

$$2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-2y}{2} - \left(2\cos^2\frac{x+y}{2} - 1\right) = \frac{3}{2}$$
$$\Leftrightarrow 2\cos^2\frac{x+y}{2} - 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-2y}{2} + \frac{1}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos^2\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-2y}{2} + \frac{1}{4} = 0$$
$$\Leftrightarrow \left(\cos\frac{x+y}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{x-2y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\sin^2\frac{x-2y}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-2y}{2} \\ \sin\dfrac{x-2y}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-2y}{2} \\ \cos\dfrac{x-2y}{2} = \pm 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos\dfrac{x-2y}{2}=1 \\ \cos\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1}{2} \end{cases} \text{hoặc} \begin{cases} \cos\dfrac{x-2y}{2}=-1 \\ \cos\dfrac{x+y}{2}=-\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

Ví dụ 42. *Xét bất đẳng thức*

$$\sin\frac{A}{2}+\sin\frac{B}{2}+\sin\frac{C}{2}\le\frac{3}{2},\forall\Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$*. Lấy* $A=2x$*,* $B=2y$*,* $C=\pi-(2x+2y)$*, ta được bài toán sau*

Bài toán 54. *Giải phương trình*

$$\sin x+\sin y+\cos(x+y)=\frac{3}{2}.$$

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+1-2\sin^2\frac{x+y}{2}=\frac{3}{2}\\
\Leftrightarrow&2\sin^2\frac{x+y}{2}-2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\frac{1}{2}=0\\
\Leftrightarrow&\sin^2\frac{x+y}{2}-\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}+\frac{1}{4}=0\\
\Leftrightarrow&\left(\sin\frac{x+y}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{x-y}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{x-y}{2}=0\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}\sin\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}\\ \sin\dfrac{x-y}{2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}\\ \cos\dfrac{x-y}{2}=\pm1\end{cases}\\
\Leftrightarrow&\begin{cases}\cos\dfrac{x-y}{2}=1\\ \sin\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{1}{2}\end{cases}\text{hoặc}\begin{cases}\cos\dfrac{x-y}{2}=-1\\ \sin\dfrac{x+y}{2}=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Ví dụ 43. *Xét bất đẳng thức*

$$\cos^2\frac{A}{2}+\cos^2\frac{B}{2}+\cos^2\frac{C}{2}\le\frac{9}{4},\forall\Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$*. Lấy* $A=2x$*,* $B=2y$*,* $C=\pi-(2x+2y)$*, ta được bài toán sau*

Bài toán 55. *Giải phương trình*

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \sin^2(x+y) = \frac{9}{4}.$$

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{\cos 2x + \cos 2y}{2} + \sin^2(x+y) = \frac{9}{4}\\
\Leftrightarrow &1 + \cos(x+y)\cos(x-y) + 1 - \cos^2(x+y) = \frac{9}{4}\\
\Leftrightarrow &\cos^2(x+y) - \cos(x-y)\cos(x+y) + \frac{1}{4} = 0\\
\Leftrightarrow &\left[\cos(x+y) - \frac{1}{2}\cos(x-y)\right]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(x-y) = 0\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}\cos(x+y) - \dfrac{1}{2}\cos(x-y) = 0\\ \sin(x-y) = 0\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}\cos(x+y) = \dfrac{1}{2}\cos(x-y) = 0\\ \cos(x-y) = \pm 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\cos(x-y) = 1\\ \cos(x+y) = \dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}\cos(x-y) = -1\\ \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2}.\end{cases}\end{array}\right.
\end{aligned}$$

Ví dụ 44. *Quan sát các biến đổi trên ta thấy có thể xây dựng nên một số phương trình có lời giải tương tự. Chẳng hạn bài toán sau*

Bài toán 56. *Giải phương trình*

$$\cos^2 x + \cos^2 y + \cos^2(x-y) = \frac{3}{4}$$

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&1 + \frac{\cos 2x + \cos 2y}{2} + \cos^2(x-y) = \frac{3}{4}\\
\Leftrightarrow &1 + \cos(x+y)\cos(x-y) + \cos^2(x-y) = \frac{3}{4}\\
\Leftrightarrow &\cos^2(x+y) + \cos(x-y)\cos(x+y) + \frac{1}{4} = 0\\
\Leftrightarrow &\left[\cos(x+y) + \frac{1}{2}\cos(x-y)\right]^2 + \frac{1}{4}\sin^2(x-y) = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x+y) + \dfrac{1}{2}\cos(x-y) = 0 \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2}\cos(x-y) \\ \cos(x-y) = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos(x-y) = -1 \\ \cos(x+y) = \dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ví dụ 45. *Xét bất đẳng thức*

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}, \forall \Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$. *Lấy* $A = 2x$, $B = 2y$, $C = \pi - (2x+2y)$, *ta được bài toán sau*

Bài toán 57. *Giải phương trình*

$$\sin x.\sin y.\cos(x+y) = \frac{1}{8}.$$

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned} & 4\cos(x+y)\left[\cos(x-y) - \cos(x+y)\right] = 1 \\ \Leftrightarrow & 4\cos^2(x+y) - 4\cos(x+y)\cos(x-y) + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow & \left[2\cos(x+y) - \cos(x-y)\right]^2 + \sin^2(x-y) = 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} 2\cos(x+y) = \cos(x-y) \\ \sin(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos(x+y) = \cos(x-y) \\ \cos(x-y) = \pm 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ \cos(x+y) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} \cos(x-y) = -1 \\ \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

Ví dụ 46. *Cũng xét bất đẳng thức*

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}, \forall \Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \dfrac{\pi}{3}$. *Lấy*

$$A = 2x - y,\ B = 3y,\ C = \pi - [(2x-y) + 3y] = \pi - 2(x+y),$$

ta được bài toán sau

Bài toán 58.

$$\sin\frac{y-2x}{2}\sin\frac{3y}{2}\cos(x+y)=-\frac{1}{8}.$$

Giải. Phương trình tương đương

$$\begin{aligned}
&4\left[\cos(x+y)-\cos(2y-x)\right]\cos(x+y)=-1\\
\Leftrightarrow &4\cos^2(x+y)-4\cos(x+y)\cos(2y-x)+1=0\\
\Leftrightarrow &\left[2\cos(x+y)-\cos(2y-x)\right]^2+\sin^2(2y-x)=0\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}2\cos(x+y)=\cos(2y-x)\\ \sin(2y-x)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos(x+y)=\cos(2y-x)\\ \cos(2y-x)=\pm1\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}\cos(2y-x)=1\\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}\cos(2y-x)=-1\\ \cos(x+y)=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Ví dụ 47. *Xét bất đẳng thức*

$$\cos A\cos B\cos C\le\frac{1}{8},\forall\Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A=B=C=\dfrac{\pi}{3}$. *Lấy*

$$A=x,\ B=y,\ C=\pi-(x+y),$$

ta được bài toán sau

Bài toán 59. *Giải phương trình*

$$\cos x.\cos y.\cos(x+y)=-\frac{1}{8}.$$

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&4\cos(x+y)\left[\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]=-1\\
\Leftrightarrow &4\cos^2(x+y)+4\cos(x+y)\cos(x-y)+1=0\\
\Leftrightarrow &\left[2\cos(x+y)+\cos(x-y)\right]^2+\sin^2(x-y)=0\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}2\cos(x+y)=-\cos(x-y)\\ \sin(x-y)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2\cos(x+y)=-\cos(x-y)\\ \cos(x-y)=\pm1\end{cases}\\
\Leftrightarrow &\begin{cases}\cos(x-y)=-1\\ \cos(x+y)=\dfrac{1}{2}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}\cos(x-y)=1\\ \cos(x+y)=-\dfrac{1}{2}.\end{cases}
\end{aligned}$$

Ví dụ 48. *Xét bất đẳng thức*

$$\cos A + \cos B + \cos C \le \frac{3}{2}, \forall \Delta ABC,$$

dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $A = B = C = \frac{\pi}{3}$. *Lấy*

$$A = x,\ B = y,\ C = \pi - (x+y),$$

ta được phương trình

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}. \tag{1}$$

Lấy

$$A = 2x - y,\ B = 2y - x,\ C = \pi - [(2x-y) + (2y-x)] = \pi - (x+y)$$

ta được phương trình

$$\cos(2x-y) + \cos(2y-x) - \cos(x+y) = \frac{3}{2}. \tag{2}$$

Cộng (1) *và* (2) *ta được bài toán sau*

Bài toán 60. *Giải phương trình*

$$\cos x + \cos y + \cos(2x-y) + \cos(2y-x) = 3 + 2\cos(x+y).$$

Hướng dẫn. Phương trình đã cho tương đương

$$\begin{aligned}
&[\cos x + \cos(2y-x)] + [\cos y + \cos(2x-y)] = 3 + 2\cos(x+y)\\
\Leftrightarrow &2\cos y\cos(x-y) + 2\cos x\cos(x-y) = 3 + 2\cos(x+y)\\
\Leftrightarrow &2\cos(x-y)(\cos x + \cos y) = 3 + 2\cos(x+y)\\
\Leftrightarrow &4\cos(x-y)\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} = 3 + 4\cos^2\frac{x+y}{2} - 2\\
\Leftrightarrow &4\cos^2\frac{x+y}{2} - 4\cos(x-y)\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + 1 = 0\\
\Leftrightarrow &\left[2\cos\frac{x+y}{2} - \cos(x-y)\cos\frac{x-y}{2}\right]^2 + 1 - \cos^2(x-y)\cos^2\frac{x-y}{2} = 0. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Vì $1 - \cos^2(x-y)\cos^2\frac{x-y}{2} \ge 0$ nên

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2} - \cos(x-y)\cos\dfrac{x-y}{2} = 0\\ 1 - \cos^2(x-y)\cos^2\dfrac{x-y}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2} - \cos(x-y)\cos\dfrac{x-y}{2} = 0 \\ 1-\cos^2(x-y)\dfrac{1+\cos(x-y)}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\dfrac{x+y}{2} - \cos(x-y)\cos\dfrac{x-y}{2} = 0 \\ \cos^2(x-y)+\cos^3(x-y) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y) = 1 \\ 2\cos\dfrac{x+y}{2} = \cos\dfrac{x-y}{2} \end{cases} \qquad (2)$$

Vì $\cos(x-y)=1 \Leftrightarrow 2\cos^2\dfrac{x-y}{2}-1=1 \Leftrightarrow \cos^2\dfrac{x-y}{2}=1$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y)=1 \\ 2\cos\dfrac{x+y}{2} = \pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y)=1 \\ \cos\dfrac{x+y}{2} = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y)=1 \\ \cos^2\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y)=1 \\ 1+\cos(x+y) = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x-y)=1 \\ \cos(x+y) = -\dfrac{1}{2}. \end{cases}$$

1.1.11 Sử dụng hàm ngược để sáng tác một số phương trình, hệ phương trình.

Giả sử hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược là $y = g(x)$. Nếu vẽ đồ thị của hai hàm số trên cùng một hệ trục toạ độ Đề-các vuông góc thì hai đồ thị ấy đối xứng nhau qua đường phân giác thứ nhất. Do đó nếu hàm số $y = f(x)$ có hàm số ngược là $y = g(x)$ thì việc giải phương trình $f(x) = g(x)$ quy về giải phương trình $f(x) = x$ (hoặc $g(x) = x$). Tóm lại, trong một số trường hợp ta sử dụng mệnh đề sau

Mệnh đề. Cho $y = f(x)$ là hàm đồng biến (hoặc nghịch biến), có hàm ngược $y = f^{-1}(x)$. Ta có phép biến đổi sau

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ x \in D_f \cap D_{f^{-1}} \end{cases} \qquad (1)$$

hoặc

$$f(x) = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(x) = x \\ x \in D_f \cap D_{f^{-1}} \end{cases} \qquad (2)$$

Như vậy việc giải PT $f(x) = f^{-1}(x)$ ta thay thế được bởi các hệ phương trình tương đương (1) hoặc (2).

Ví dụ 49. *Xét hàm số* $y = f(x) = 2x^2 + 4x - 1$ *trên* $(-1; +\infty)$. *Hàm số ngược của* $f(x)$ *là* $y = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1$ *xác định trên* $(-3; +\infty)$. *Khi đó*

$$2x^2 + 4x - 1 = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 61 (Đề nghị OLYMPIC 30/04/2007). *Giải phương trình*

$$2x^2 + 4x = \sqrt{\frac{x+3}{2}}, \text{ với } x \geq -1.$$

Giải. Điều kiện $x \geq -1$ (giả thiết).
Cách 1. Xét hàm số

$$y = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1, \forall x \in [-1; +\infty).$$

Khi đó

$$y + 1 = \sqrt{\frac{x+3}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ y^2 + 2y + 1 = \dfrac{x+3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -1 \\ x = 2y^2 + 4y - 1. \end{cases}$$

Suy ra hàm số $y = 2x^2 + 4x - 1$ là hàm số ngược của hàm số $y = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1$ trên $[-1; +\infty)$. Mặt khác hàm số $y = 2x^2 + 4x - 1$ đồng biến trên $[-1; +\infty)$ nên

$$2x^2 + 4x - 1 = \sqrt{\frac{x+3}{2}} - 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 1 = x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{-3 - \sqrt{17}}{4}. \end{array} \right.$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $x = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4}$ là nghiệm duy nhất của PT đã cho.
Cách 2. Đặt $y + 1 = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$, điều kiện $y \geq 1$. Ta có hệ

$$\begin{cases} (y+1)^2 = \dfrac{x+3}{2} \\ 2x^2 + 4x = y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 + 4y = x + 1 & (1) \\ 2x^2 + 4x = y + 1. & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$2(y^2 - x^2) + 4(y - x) = x - y \Leftrightarrow 2(y - x)(y + x) + 3(y - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y - x = 0 \\ 2(y+x) + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = \dfrac{-3-2x}{2}. \end{array}\right.$$

• Khi $y = x$, thay vào (2) ta được

$$2x^2 + 4x = x + 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4} \\ x = \dfrac{-3-\sqrt{17}}{4} \text{ (loại)}. \end{array}\right.$$

• Khi $y = -\dfrac{3+2x}{2}$, thay vào (2) ta được

$$4x^2 + 10x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{-5-\sqrt{21}}{4} \text{ (loại)} \\ x = \dfrac{-5+\sqrt{21}}{4}. \end{array}\right.$$

Với $x = \dfrac{-5+\sqrt{21}}{4}$ ta có

$$y = -\frac{3+2x}{2} = -\frac{1+\sqrt{21}}{4} < -1 \text{ (không thoả mãn } y \geq -1)$$

Kết hợp với điều kiện suy ra $x = \dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$ là nghiệm duy nhất của PT đã cho.

Lưu ý. Cách đặt $y + 1 = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$ được tìm như sau : Ta đặt $ay + b = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$ (với a và b sẽ tìm sau). Khi đó có hệ

$$\left\{\begin{array}{l} ay^2 + 2aby + b^2 = \dfrac{x+3}{2} \\ 2x^2 + 4x = ay + b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2ay^2 + 4aby = x + 3 - 2b^2 \\ 2x^2 + 4x = ay + b \end{array}\right.$$

Ta cần chọn a và b sao cho hệ trên là hệ đối xứng loại hai, muốn vậy thì

$$\frac{2a}{2} = \frac{4ab}{4} = \frac{1}{a} = \frac{3-2b^2}{b} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 1 \\ b = 1. \end{array}\right.$$

Do đó ta đặt $y + 1 = \sqrt{\dfrac{x+3}{2}}$.

Ví dụ 50. *Xét hàm số $y = f(x) = x^2 - 3x$ trên $\left[\dfrac{3}{2}; +\infty\right)$. Hàm số ngược của $f(x)$ là $y = \dfrac{3+\sqrt{9+4x}}{2}$ xác định trên $\left[-\dfrac{9}{4}; +\infty\right)$. Khi đó*

$$\frac{3+\sqrt{9+4x}}{2} = x^2 - 3x \Leftrightarrow \sqrt{9+4x} = 2x^2 - 6x - 3.$$

Ta có bài toán sau

Bài toán 62. *Giải phương trình* $\sqrt{9+4x} = 2x^2 - 6x - 3.$

Giải. Điều kiện $x \geq -\dfrac{9}{4}$. Đặt $2y - 3 = \sqrt{9+4x}$, điều kiện $y \geq \dfrac{3}{2}$. Ta thu được hệ

$$\begin{cases} (2y-3)^2 = 9 + 4x \\ 2y - 3 = 2x^2 - 6x - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 - 12y = 4x \\ 2x^2 - 6x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y^2 - 6y = 2x & (1) \\ 2x^2 - 6x = 2y & (2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) theo vế ta được

$$2(y^2 - x^2) - 6y + 6x = 2x - 2y \Leftrightarrow 2(y^2 - x^2) + 4(x - y) = 0$$
$$\Leftrightarrow (y - x)(y + x - 2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = 2 - x. \end{array}\right.$$

• Khi $y = x$, thay vào (1) ta được

$$2x^2 - 6x = 2x \Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Khi $x = 0$ thì $y = 0$ (loại). Khi $x = 4$ thì $y = 4$.
• Khi $y = 2 - x$, thay vào (2) ta được

$$x^2 - 3x = 2 - x \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 - \sqrt{3} \\ x = 1 + \sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Khi $x = 1 + \sqrt{3}$ thì $y = 1 - \sqrt{3}$, không thoả mãn điều kiện.
Khi $x = 1 - \sqrt{3}$ thì thế vào phương trình thấy không thoả mãn.
Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 4$.
Lưu ý. Theo cách xây dựng bài toán trên thì phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{cases} x^2 - 3x = x \\ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4$$

và tương đương với

$$\begin{cases} \dfrac{3 + \sqrt{9+4x}}{2} = x \\ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{9+4x} = 2x - 3 \\ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 - 16x = 0 \\ x \geq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = 4.$$

Ví dụ 51. *Hàm số* $y = \sqrt[3]{x+3}$ *là hàm số ngược của hàm số* $y = x^3 - 3$ *trên* $\mathbb{R}$. *Do đó ta có bài toán sau*

Bài toán 63. *Giải phương trình* $\sqrt[3]{x+3} = x^3 - 3$

Giải.
Tập xác định $\mathbb{R}$. Đặt $y = \sqrt[3]{x+3}$. Khi đó ta có hệ

$$\begin{cases} y^3 = x + 3 & (1) \\ x^3 = y + 3 & (2) \end{cases}$$

Lấy (2) trừ (1) theo vế ta được

$$x^3 - y^3 = y - x \Leftrightarrow x^3 + x = y^3 + y. \tag{3}$$

Xét hàm số $f(t) = t^3 + t$. Vì $f'(t) = 3t^2 + 1 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ nên

$$(3) \Leftrightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$$

Do đó

$$x^3 = x + 3 \Leftrightarrow x^3 - x = 3 \tag{4}$$

Giả sử $x = pt$, thay vào (4) ta được

$$p^3t^3 - pt = 3 \Leftrightarrow t^3 - \frac{1}{p^2}t = \frac{3}{p^3}. \tag{5}$$

Ta cần chọn p sao cho

$$\frac{1}{p^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow p^2 = \frac{4}{3} \Rightarrow p = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Khi đó (5) viết lại

$$t^3 - \frac{3}{4}t = \frac{3.3\sqrt{3}}{8} \Leftrightarrow 4t^3 - 3t = \frac{9\sqrt{3}}{2}. \tag{6}$$

Để cho gọn, kí hiệu $m = \dfrac{9\sqrt{3}}{2} > 1$. Đặt

$$m = \frac{1}{2}\left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right) \text{ hay } \alpha^3 = m \pm \sqrt{m^2 - 1} \Leftrightarrow \alpha = \sqrt[3]{m \pm \sqrt{m^2 - 1}}.$$

Chỉ cần chọn

$$\alpha = \sqrt[3]{m + \sqrt{m^2 - 1}} = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}}{2} + \sqrt{\frac{239}{4}}} = \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3} + \sqrt{239}}{2}}.$$

Để ý rằng $\dfrac{1}{\alpha} = \sqrt[3]{\dfrac{9\sqrt{3} - \sqrt{239}}{2}}$ và

$$\frac{1}{2}\left(\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3}\right) = 4\left[\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right]^3 - 3\left[\frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)\right].$$

Vậy

$$t_0 = \frac{1}{2}\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}+\sqrt{239}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}-\sqrt{239}}{2}}\right)$$

là một nghiệm của PT (6). Ta sẽ chứng minh t_0 là nghiệm duy nhất của PT. Ta có $|t_0| > 1$ và

$$4t^3 - 3t = 4t_0^3 - 3t_0 \Leftrightarrow (t - t_0)(4t^2 + 4t_0t + 4t_0^2 - 3) = 0.$$

Để ý rằng phương trình $4t^2 + 4t_0x + 4t_0^2 - 3 = 0$ vô nghiệm do

$$\Delta' = 4t_0^2 - 4(4t_0^2 - 3) = 12 - 12t_0^2 = 12(1 - t_0^2) < 0 \text{ (vì } t_0^2 > 1).$$

Vậy $t = \frac{1}{2}\left(\sqrt[3]{m+\sqrt{m^2-1}} + \sqrt[3]{m-\sqrt{m^2-1}}\right)$ là nghiệm duy nhất của phương trình (6). Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}+\sqrt{235}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{9\sqrt{3}-\sqrt{235}}{2}}\right).$$

Bài toán 64. *Cho trước số thực a. Giải phương trình (ẩn là x)*

$$a^{2011} + x = \sqrt[2011]{a - x^{2011}}.$$

Giải. Tập xác định $\mathbb{R}$. Ta xem a như ẩn số. Khi đó ta xét hàm số $y = f(a) = a^{2011} + x$. Ta có

$$y = a^{2011} + x \Leftrightarrow a^{2011} = y - x \Leftrightarrow a = \sqrt[2011]{y - x}.$$

Vậy hàm số $y = \sqrt[2011]{a - x}$ là hàm ngược của hàm $y = a^{2011} + x, \forall a \in \mathbb{R}$. Mặt khác vì

$$\left(a^{2011} + x\right)' = 2011a^{2010} \geq 0, \forall a \in \mathbb{R}$$

nên $y = a^{2011} + x$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$, do đó

$$a^{2011} + x = \sqrt[2011]{a - x^{2011}} \Leftrightarrow \begin{cases} a^{2011} + x = a \\ a \in \mathbb{R} \end{cases} \Leftrightarrow x = a - a^{2011}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = a - a^{2011}$.

Ví dụ 52. *Hàm số $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ là hàm số ngược của hàm số $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ trên $(0; +\infty)$. Do đó ta có bài toán sau*

Bài toán 65. *Giải hệ phương trình*

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^y \\ y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x \end{cases} \qquad (1)$$

Giải. Ta có

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x \\ y = \log_{\frac{1}{4}} x. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x \\ \left(\dfrac{1}{4}\right)^x = \log_{\frac{1}{4}} x. \end{cases} \qquad (3)$$

Hàm số $g(x) = \log_{\frac{1}{4}} x$ là hàm ngược của hàm $f(x) = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x$, do đó đồ thị của hai hàm này đối xứng nhau qua đường phân giác của góc phần tư thứ nhất $y = x$. Bởi vậy (x, y) là nghiệm của (3) khi và chỉ khi $x = y$, nghĩa là

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x = \left(\dfrac{1}{4}\right)^x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}.$$